

АДАПТИВНАЯ СЕГМЕНТАЦИЯ ГРАНИЦ СТРУКТУРЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Максимов А.Е., Куксенко С.П.

*Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
mae@tusur.ru, ksergp@tu.tusur.ru*

В работе приведены результаты использования адаптивной сегментации границ структуры для ускорения сходимости и повышения точности решения электростатических задач методом моментов. Определены значения параметров алгоритма, при которых достигается уменьшение вычислительных затрат.

Решение задач электростатики и, в частности, анализ линий передачи с использованием квазистатического подхода сводится к решению уравнения Пуассона/Лапласа, аналитическое решение которого известно только для простых структур и поэтому чаще используют численные методы: конечных разностей, конечных элементов и моментов. При использовании последнего дискретизируется только поверхность анализируемой структуры, что априорно снижает вычислительную сложность решения. Тем не менее, методы конечных разностей и элементов, использующие объемную дискретизацию, также широко применяются [1–3].

Метод моментов (МоМ) применяют для решения уравнения Пуассона/Лапласа в интегральном виде. Так, при анализе линий передачи оно имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma, \quad (1)$$

где $\sigma(\mathbf{r}')$ – поверхностная плотность заряда, \mathbf{r} и \mathbf{r}' – точки наблюдения (x, y) и источника (x', y') , $d\Gamma$ – дифференциал по поверхности структуры, а $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – соответствующая функция Грина. В такой постановке задачи считаются заданными граничные условия по приложенному напряжению (φ) и требуется найти плотность заряда σ , после чего вычисляются матрицы погонных параметров линии $\mathbf{R}, \mathbf{L}, \mathbf{C}, \mathbf{G}$. При этом вычисление матрицы коэффициентов электростатической индукции или просто ёмкостной матрицы \mathbf{C} представляет наибольшую сложность [4]. В работе [5] представлен подробный вывод моделей вычисления ёмкостной матрицы с использованием МоМ для двумерных и трёхмерных структур с границами произвольной сложности, включающих идеально проводящую плоскость и без неё. Для ясности дальнейшего изложения кратко поясним суть данного подхода на примере двумерной задачи (для трехмерной задачи подход аналогичен).

Когда в структуре имеются границы соприкосновения диэлектрика с проводником, необходимо работать в терминах полной плотности заряда σ_T , которая представляет собой сумму плотности свободного и поляризационного зарядов $\sigma_T(\mathbf{r}) = \sigma_S(\mathbf{r}) + \sigma_P(\mathbf{r})$ [6]. При этом, на границе диэлектрик-диэлектрик полная плотность заряда состоит только из плотности поляризационных зарядов. Можно показать [5], что для границ проводник-диэлектрик справедливо выражение

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}|] dl', \quad \mathbf{r} \in L_C, \quad (2)$$

где dl' – элемент контура границ, L_C – его длина, а для границ диэлектрик-диэлектрик –

$$0 = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\underline{}}|^2} \right] \cdot \mathbf{n} dl', \quad \mathbf{r} \in L_D, \quad (3)$$

где dl – элемент контура границ, L_D – его длина, \mathbf{n} – вектор нормали. Далее, используя поверхностную сегментацию границ структуры, а также базисные и тестовые функции, эти выражения дают систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида $\mathbf{S}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{V}$, где \mathbf{S} – плотная матрица порядка N , $\mathbf{\Sigma}$ и \mathbf{V} – матрицы размера $N \times N_D$, N_D – число проводников в структуре не считая опорного. Элементы матриц СЛАУ вычисляются аналитически [5]. Решение СЛАУ даёт распределение заряда на поверхности структуры. Для хранения матрицы \mathbf{S} требуется большой объем памяти, что предъявляет высокие требования к аппаратной части персональных компьютеров (ПК), на которых производятся вычисления, и затратам машинного времени при работе с ней, особенно, при многовариантном анализе или

оптимизации исследуемой структуры. Очевидно, что чем меньшую длину имеет каждый сегмент, тем выше будет точность вычислений. Однако это ведёт к увеличению порядка матрицы СЛАУ и, тем самым, росту затрат машинной памяти. Поэтому актуален поиск такого способа сегментации, который даёт требуемую точность решения СЛАУ при как можно меньших затратах машинной памяти [3, 7, 8].

Способы сегментации можно условно разбить на 3 группы. Первая – это равномерная (эквидистантная) сегментация, при которой все границы структуры разбиваются на сегменты равной длины. При этом, для достижения высокой точности решения, требуется большое число сегментов малой длины. Поэтому способ характеризуется большими вычислительными затратами. Вторая группа – это неравномерная сегментация, когда для разных границ структуры используется разный шаг сегментации. Известно, что точность численного решения в подобластях сосредоточения особенностей решения существенно влияет на итоговую точность. Так, повышением числа сегментов в таких подобластях, можно повысить точность решения, а уменьшением числа сегментов в подобластях плавного изменения решения можно уменьшить вычислительные затраты и, тем самым, повысить скорость решения [9]. Способ достаточно эффективен, однако, для его реализации необходимо «ручное» указание под областей решения, что не всегда возможно. И наконец, третья группа – это адаптивная сегментация. Под адаптивной сегментацией понимается такой подход, при котором длина сегментов для каждой подобласти решения подбирается автоматически и итеративно, начиная от заданной величины с постепенным уменьшением длины сегментов до достижения требуемой точности решения. Достоинством такой сегментации является то, что учащение может производиться как равномерно, так и неравномерно, что порождает различные подходы к адаптивной сегментации и делает этот способ более универсальным [10, 11]. Кроме того, анализируемая структура может раздельно сегментироваться для вычисления каждого погонного параметра линии. Так, для вычисления только матрицы коэффициентов электромагнитной индукции L целесообразна частая сегментация лишь границ проводник-диэлектрик.

Цель работы – исследовать эффективность адаптивной сегментации границ структуры при решении электростатических задач методом моментов.

Для достижения поставленной цели были произведены расчеты для структуры из рисунка 1, с размерами, приведенными в работе [7]. Её отличительной особенностью является то, что ширина проводников много больше их высоты.

При использовании частой равномерной сегментации длина сегмента и их общее число составили $l_3=0,01$ мм и $N_3=9374$ соответственно. В угоду большей наглядности, далее будем оперировать не матрицами погонных параметров, а соответствующими значениями из этих матриц для центрального проводника (обозначен на рисунке 1 черным цветом), по аналогии с подходом из [7]: ёмкостью C_3 , индуктивностью L_3 и волновым сопротивлением Z_3 (далее – эталонные значения). При вычислениях использовались пакет прикладных программ Octave, метод Гаусса и ПК со следующими характеристиками: процессор – AMD Ryzen 3 3200G, тактовая частота – 3,6 ГГц; объем ОЗУ – 16 Гб; количество ядер – 4; количество виртуальных процессоров – 4. Затраты времени и машинной памяти составили $T_3=29,56$ с и $V_3=670$ Мб соответственно, а интересующие величины – $C_3=128,06$ пФ/м, $L_3=0,118$ мкГн/м и $Z_3=47,9$ Ом.

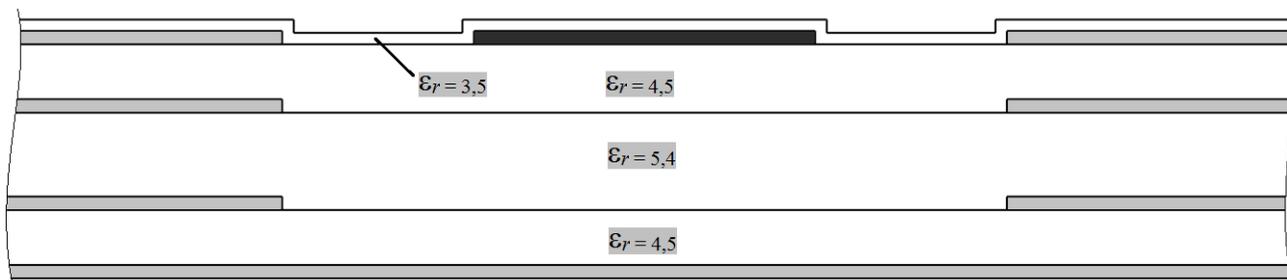


Рис. 1. Поперечное сечение исследуемой структуры (серым и черным обозначены проводники, белым – диэлектрики).

Далее исследовано три способа адаптивной сегментации:

1. Задаётся начальная редкая и равномерная сегментация с длиной сегментов l_0 и их общим числом N_0 . Затем итеративно происходит разбиение тех сегментов, в которых наблюдается наибольшее изменение распределения заряда, на основе задаваемого процента подлежащих разбиению сегментов от их общего числа p . При разбиении сегментов в их центрах добавляются новые узлы, и процесс продолжается до достижения числа итераций n . При этом на последней итерации число сегментов составляет N , а длина самых коротких их них – l . На каждой итерации при текущей сегментации происходит расчёт ёмкости C , индуктивности L и волнового сопротивления Z центрального проводника. Результаты, полученные на последней итерации, сведены в таблицу 1. В таблице также приведены полученные различия в результатах, оцениваемые как $\Delta C = |C - C_{\text{э}}|/C_{\text{э}}$, $\Delta L = |L - L_{\text{э}}|/L_{\text{э}}$ и $\Delta Z = |Z - Z_{\text{э}}|/Z_{\text{э}}$, соответствующие затраты времени T , машинной памяти V и их отношения к эталонным значениям.

Таблица 1. Результаты вычислений при использовании способа 1.

l_0 , мм	N_0	p , %	n	l , нм	N	C , пФ/м (ΔC , %)	L , мкГн/м (ΔL , %)	Z , Ом (ΔZ , %)	V , Мб ($V_{\text{э}}/V$)	T , с ($T_{\text{э}}/T$)
1,0	111	5	25	0,03	747	126,34 (1,3)	0,0697 (41)	29,27 (38,9)	4,3 (157)	1,91 (16)
			20	0,95	1188	125,99 (1,6)	0,0699 (40,8)	29,46 (38,5)	10,8 (62)	1,38 (21)
		10	25	0,03	1970	125,68 (1,9)	0,1117 (5,3)	43,54 (9,1)	29,6 (23)	4,32 (7)
			15	30,52	1277	126,59 (1,1)	0,0697 (40,9)	30,10 (37,2)	12,4 (54)	0,84 (35)
		20	20	0,95	2636	123,70 (3,4)	0,1119 (5,1)	43,47 (9,2)	53,0 (13)	6,37 (5)
			15	30,52	2157	128,51 (0,3)	0,1118 (5,3)	52,66 (9,9)	35,5 (19)	3,29 (9)
0,1	626	5	10	97,66	1226	127,96 (0,1)	0,1127 (4,5)	49,04 (2,4)	11,5 (58)	0,43 (69)
			15	3,05	1618	126,20 (1,5)	0,1139 (3,4)	46,50 (2,9)	20,0 (34)	0,69 (43)
		10	10	97,66	1787	127,22 (0,7)	0,1136 (3,7)	46,32 (3,3)	24,4 (28)	3,07 (10)
			15	3,05	2923	126,41 (1,3)	0,1138 (3,5)	46,20 (3,5)	65,2 (10)	0,67 (44)
		15	10	97,66	2776	125,04 (2,4)	0,1148 (2,7)	44,56 (7)	58,8 (11)	4,10 (7)
		20	5	3125,00	1593	127,98 (0,1)	0,1132 (4)	45,02 (6)	19,4 (35)	0,39 (77)
			10	97,66	4035	126,19 (1,5)	0,1141 (3,3)	45,55 (4,9)	124,2 (5)	1,51 (20)

2. Способ аналогичен предыдущему, с тем отличием, что на каждой итерации разбиваются все сегменты структуры. Результаты представлены в таблице 2.

3. Сначала производится сегментация, аналогично п. 2, после чего производится расчёт значения C . Далее происходит учащение только границ проводников исходной сегментации и производится расчёт величины L . При этом на последней итерации при учащении только границ проводников число сегментов составляет N_L . Результаты сведены в таблицу 3.

Из таблиц 1–3 видно, что адаптивная сегментация позволяет существенно сократить вычислительные затраты. При этом, способ 1, несмотря на большую сложность в реализации, показывает результаты хуже, чем остальные (большая погрешность при сопоставимых результатах экономии времени и машинной памяти). Второй способ показывает наилучшие результаты для структур исследуемого типа (с широкими проводниками). Способ 3 предпочтительнее второго в случае, когда экономия времени приоритетнее экономии машинной памяти. Стоит отметить, что для структур другого

типа перечисленные способы могут показать иные значения экономии ресурсов, но, тем не менее, она будет существенна.

Таблица 2. Результаты вычислений при использовании способа 2.

l_0 , мм	N_0	n	l , мкм	N	C , пФ/м (ΔC , %)	L , мкГн/м (ΔL , %)	Z , Ом (ΔZ , %)	V , Мб (V_3/V)	T , с (T_3/T)
1	117	5	31,3	1454	127,2481 (0,6)	0,1236 (4,8)	48,6058 (1,5)	16 (41,6)	0,4882 (60,5)
		6	15,6	2908	126,1341 (1,5)	0,1242 (5,3)	51,1801 (6,9)	65 (10,4)	1,8720 (15,8)
		7	7,8	5816	125,7217 (1,8)	0,1246 (5,6)	51,5778 (7,7)	258 (2,6)	9,7654 (3)
2	75	6	31,3	1406	129,4531 (1,1)	0,1158 (1,9)	44,7780 (6,5)	15 (44,5)	0,4728 (62,5)
		7	15,6	2810	128,3642 (0,2)	0,1170 (0,8)	47,4003 (1,0)	60 (11,1)	1,9170 (15,4)
		8	7,8	5620	127,9835 (0,1)	0,1177 (0,3)	47,8285 (0,2)	241 (2,8)	8,8584 (3,3)

Таблица 3. Результаты вычислений при использовании способа 3.

l_0 , мм	N_0	n	l , мкм	N	N_L	C , пФ/м (ΔC , %)	L , мкГн/м (ΔL , %)	Z , Ом (ΔZ , %)	V , Мб (V_3/V)	T , с (T_3/T)
0,5	195	5	15,6	2762	2311	129,4607 (1,1)	0,1020 (13,6)	47,6090 (0,6)	99 (6,8)	1,7789 (16,6)
		6	7,8	5524	4583	128,4252 (0,3)	0,1025 (13,2)	48,1119 (0,5)	393 (1,7)	8,3396 (3,5)
1	117	5	31,3	1454	1197	127,2481 (0,6)	0,0870 (26,3)	44,6624 (6,8)	27 (24,8)	0,5957 (49,6)
		6	15,6	2908	2365	126,1341 (1,5)	0,0871 (26,2)	47,0596 (1,8)	107 (6,3)	1,9581 (15,1)
		7	7,8	5816	4701	125,7217 (1,8)	0,0873 (26,0)	47,4243 (1,0)	427 (1,6)	9,2807 (3,2)

Таким образом, в работе исследованы способы адаптивной сегментации границ структуры при решении электростатических задач методом моментов и показана её эффективность для уменьшения вычислительных затрат. В дальнейшем, для ещё большей экономии вычислительных ресурсов, видится целесообразным её совместное использование с адаптивной перекрестной аппроксимацией.

Работа выполнена в рамках проекта FEWM-2020-0039 Минобрнауки России

ЛИТЕРАТУРА

1. Sadiku M.N.O. Numerical techniques in electromagnetics. – 3rd ed. // Boca Raton: CRC Press, 2009. – 710 p.
2. Dworsky N. Introduction to numerical electrostatics using MATLAB // Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2014. – 456 p.
3. Дубицкий С. Инженерное моделирование квазистатического электромагнитного поля в программе ELCUT для задач электроники // Силовая электроника. – 2017. – №6. – С. 64–68.
4. Сычев А.Н., Стручков С.М. Системы параметров одинаковых связанных линий с неуравновешенной электромагнитной связью // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2014. – № 1 (31). – С. 39-50.
5. Газизов Т.Р. Уменьшение искажений электрических сигналов в межсоединениях // под ред. Н.Д. Малютина – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 212 с.
6. Bazdar M.B. Evaluation of quasi-static matrix parameters for multiconductor transmission lines using Galerkin's method / M.B. Bazdar, A.R. Djordjevic, R.F. Harrington, et al. // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1994. – Vol. 42, no. 7. – P. 1223–1228.

7. Аширбакиев Р.И., Салов В.К. Адаптивный итерационный выбор оптимальной сегментации границ проводников и диэлектриков в задачах электростатики // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2013. – №. 3 (29). С. 159–161.
8. Максимов А.Е. Адаптивное уташение сетки при анализе линий передачи методом моментов / А.Е. Максимов, И.А. Онищенко, С.П. Куksenко // Сборник науч. труд. VI всероссийской науч.–практ. конф. «Информационные технологии и когнитивная электросвязь». – Екатеринбург, Россия, 23 апреля, 2020 – С. 34–36.
9. Фуско В. СВЧ-цепи. Анализ и автоматизированное проектирование: пер. с англ. // М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
10. Makarov S.N. Low-frequency electromagnetic modeling for electrical and biological systems using MATLAB / S.N. Makarov, G.M. Noetscher, A. Nazarian. // Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2016. – 589 p.
11. Lezhnin E.V., Kuksenko S.P. Algorithm of nonequidistant segmentation of boundaries of conductors and dielectrics for computer-aided design of strip structures // Proceedings of IEEE 2017 International multi-conference on engineering, computer and information sciences (SIBIRCON). – Novosibirsk, 2017. – P. 468–471.