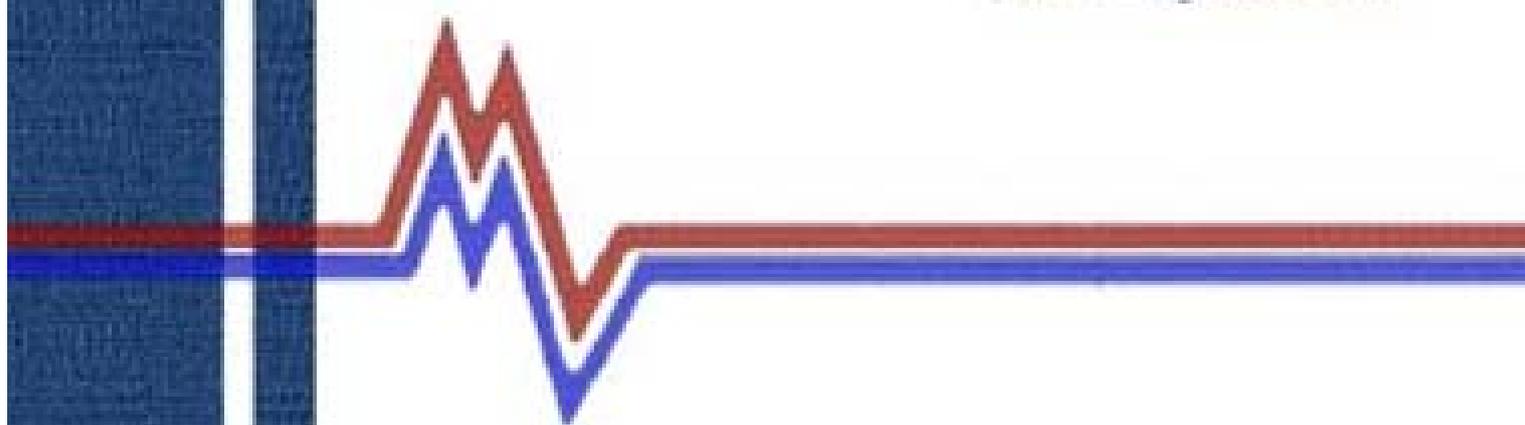




# Электромагнитная совместимость:

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

С.П. Куксенко



Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Томский государственный университет систем  
управления и радиоэлектроники

С. П. Куксенко

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ:  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ**

Учебное пособие  
для студентов технических направлений подготовки  
и специальностей

Томск  
Издательство ТУСУРа  
2020

УДК 621.391.823(075.8)  
ББК 32.841.174я73  
К898

**Рецензенты:**

**Костарев И. С.**, канд. техн. наук, нач. отд. АО «НПЦ «Полюс»;  
**Гизатуллин З. М.**, д-р техн. наук, проф.  
каф. систем автоматизированного проектирования  
Казанского национального исследовательского  
технического университета им. А. Н. Туполева

**Куксенко, Сергей Петрович**

К898      **Электромагнитная совместимость: численные методы решения задач электростатики: учеб. пособие для студентов техн. направлений подготовки / С. П. Куксенко.** – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2020. – 268 с.

ISBN 978-5-86889-879-2

Показана актуальность применения математического моделирования при решении проблемы обеспечения электромагнитной совместимости различных технических средств. Обсуждаются общие вопросы, связанные с интегральными и дифференциальными уравнениями. Рассмотрены особенности использования численных методов конечных разностей, моментов и элементов при решении задач электростатики. Особое внимание уделено способам повышения точности вычислений и экономии машинных ресурсов. Изложены методы решения систем линейных алгебраических уравнений и тенденции их развития. Приведены примеры решения тестовых задач, в том числе с использованием пакета GNU Octave. Для закрепления пройденного материала и самопроверки приведены контрольные вопросы и задания.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям.

УДК 621.391.823(075.8)  
ББК 32.841.174я73

ISBN 978-5-86889-879-2

© Куксенко С. П., 2020  
© Томск. гос. ун-т систем упр.  
и радиоэлектроники, 2020

## Предисловие

The world may be utterly crazy  
And life may be labour in vain;  
But I'd rather be silly than lazy,  
And would not quit life for its pain.

*James Clerk Maxwell*

Электромагнитное взаимодействие не только объясняет все электрические и магнитные явления, но и обеспечивает силы, благодаря которым вещество на атомном и молекулярном уровне существует как целое. Изучение электромагнитных явлений рассматривается в теории электромагнитного поля, описывающей взаимодействие между электрическими зарядами с помощью уравнений Максвелла (в дифференциальной или интегральной форме), связывающих источники (заряды и токи) с создаваемыми ими электромагнитными полями и потоками.

Аналитические решения в замкнутом виде известны только в ограниченном количестве частных случаев, которые крайне редко применимы к решению практических задач. Поэтому для преодоления разрыва между теорией и требованиями практики при решении реальных задач используются различного рода (более или менее грубые) упрощения или приближения, например квазистатический подход.

Появление компьютеров сильно изменило акценты при решении уравнений Максвелла. Так, до появления компьютеров было выгодно прикладывать значительные усилия для предотвращения громоздких вычислений, часто ценой длительных аналитических манипуляций и в итоге значительно уменьшенной применимости. Наоборот, с появлением мощных компьютеров привлекательным стало использование более простых методов, требующих больших вычислений. Такие вычислительные методы применимы при решении различного рода задач без необходимости модификации алгоритмов или компьютерных программ.

Сказанное выше послужило развитию такого направления, как вычислительная электродинамика. Это направление важно для современных инженеров и ученых, которые решают электромаг-

нитные задачи с помощью специализированных инструментальных средств. Такие средства позволяют ускорить и удешевить процесс проектирования, где использование дорогостоящих и трудоемких прототипов (физическое моделирование) сведено к минимуму. Эти инструменты могут дать важную информацию об электромагнитных процессах, протекающих в проектируемом устройстве, получение которой осложнено или даже невозможно посредством экспериментов или аналитических расчетов. Автоматизация вычислений позволяет провести обширные структурные и параметрические исследования, а при необходимости быстрой разработки, анализа и оптимизации проектируемых устройств решающее значение для поддержания их конкурентоспособности может иметь использование инструментария вычислительной электродинамики. Таким образом, средства вычислительной электродинамики являются базовым инструментарием, который необходим современным техническим специалистам в повседневной трудовой деятельности при решении задач электромагнитной совместимости в целом и электростатики в частности.

Автор благодарен аспирантам Иванову А. А. и Квасникову А. А. за помощь в подготовке материалов пособия, а заведующему кафедрой телевидения и управления Газизову Т. Р. за ряд ценных замечаний при обсуждении материалов.

## Список сокращений

- КЛБФ – кусочно-линейная базисная функция  
КПБФ – кусочно-постоянная базисная функция  
КСБФ – кусочно-синусоидальная базисная функция  
КЭ – конечный элемент  
МВН – метод взвешенных невязок  
МКР – метод конечных разностей  
МКЭ – метод конечных элементов  
МоМ – метод моментов  
МПЛ – микрополосковая линия  
МПЛП – многопроводная линия передачи  
РЭС – радиоэлектронное средство  
САПР – система автоматизированного проектирования  
СВЧ – сверхвысокие частоты  
СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений  
ЭМС – электромагнитная совместимость  
АСА – adaptive cross approximation, адаптивная перекрестная аппроксимация  
AINV – approximate inverses, приближенный обратный  
BiCG – biconjugate gradient method, метод бисопряженных градиентов  
BiCGStab – biconjugate gradient stabilized method, метод стабилизированных бисопряженных градиентов  
CGS – conjugate gradient squared method, метод сопряженных квадратичных градиентов  
CSC – compressed column storage, разреженный столбцовый формат  
CSR – compressed row storage, разреженный строчный формат  
FDM – finite difference method, метод конечных разностей  
FEM – finite element method, метод конечных элементов  
GMRES – generalized minimal residual method, метод обобщенной минимальной невязки  
ILU – incomplete LU factorization, неполное LU-разложение  
ILUT – incomplete LU factorization with treshold, неполное LU-разложение с порогом

MoM – method of moments, метод моментов

SAINV – sparse approximate inverse, разреженный приближенно обратный

SPAI – sparse approximate inverse, разреженный приближенный обратный

TEM – transverse electromagnetic, поперечная электромагнитная

# **1 ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ И ЭЛЕКТРОСТАТИКА: ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ**

## **1.1 Электромагнитная совместимость**

Открытие электромагнитных явлений и последующее изобретение электромагнитного телеграфа (П. Л. Шиллинг, 1832) и радио (А. С. Попов, 1895) фактически стало началом создания радиоэлектронных средств (РЭС) и тем самым глобального процесса информатизации, а также борьбы с радиопомехами, сначала с непреднамеренными (атмосферными и промышленными), а затем и с преднамеренными. Достижения в области радиотехники и электроники, а также в вычислительных, информационных, телекоммуникационных и других технологиях послужили широкому внедрению во все сферы современного общества различных РЭС.

Под РЭС понимают техническое средство, состоящее из одного или нескольких радиоприемных и (или) радиопередающих устройств и вспомогательного оборудования. В более общем смысле под РЭС подразумевается изделие и его составные части, в основу функционирования которых положены принципы радиотехники и электроники. Структура и состав этих средств могут сильно варьировать в зависимости от их функционального назначения.

Конкуренция производителей РЭС требует регулярного и быстрого появления с минимальными затратами все более совершенных их видов. Однако выполнение этого требования с ростом сложности РЭС становится невозможным без применения автоматизированного проектирования, в основе которого лежит компьютерное моделирование. Поэтому наличие эффективной системы автоматизированного проектирования (САПР) с возможностью моделирования особенно важно для плодотворной работы современного специалиста, а ее использование позволяет существенно снизить затраты времени на разработку и повысить качество конечного изделия, сделав его более рентабельным. Помимо прочего, использование САПР позволяет экономить временные и финансовые ресурсы, требуемые для разработки, оценить правильность принятых технических решений, учесть требования

электромагнитной совместимости (ЭМС) и возможные дестабилизирующие факторы, влияющие на работу конечного изделия [1].

Основными элементами РЭС являются антенны и СВЧ-устройства (прежде всего линии передачи (волноводы) и резонаторы) [2]. Из-за конструктивных особенностей последних для повышения эффективности их проектирования часто используется квазистатический подход. Он применим, когда поперечные размеры рассматриваемой структуры малы по сравнению с длиной распространяющейся электромагнитной волны. Это позволяет свести уравнения Максвелла к телеграфным и тем самым уменьшить вычислительные затраты. Данный подход получил широкое распространение при проектировании на основе анализа многопроводных линий передачи (МПЛП). Особенностью такого проектирования является учет распределенных параметров между всеми проводниками. На основе МПЛП моделируются различные реальные полосковые структуры, которые широко используются для создания элементов РЭС: печатных плат, фильтров, средств снижения уровня перекрестных помех, антенн и др.

Помимо сугубо конструкторских аспектов проектирования, тенденции развития современных РЭС обостряют проблему электромагнитной совместимости, появившуюся со времен первых радиопередатчиков А. С. Попова. Согласно ГОСТ Р 50397-2011 ЭМС технического средства – это его способность функционировать с заданным качеством в заданной электромагнитной обстановке и не создавать недопустимых электромагнитных помех другим техническим средствам. При этом под техническим средством подразумевается электротехническое, электронное и радиоэлектронное изделие, а также любое изделие, содержащее электрические и/или электронные составные части (оно может быть устройством, оборудованием, системой или установкой). Конструктивное усложнение РЭС и ужесточение требований ЭМС, обусловленное ростом верхних частот полезных и помеховых сигналов, плотности монтажа, а также возможностей генераторов преднамеренных электромагнитных воздействий, в совокупности с необходимостью учета межэлементных, межблочных и межсистемных взаимовлияний требует все более тщательного проектиро-

вания РЭС. Например, при обеспечении ЭМС антенн важен контроль коэффициента стоячей волны и диаграммы направленности не только в рабочем диапазоне частот, но и в намного более широком диапазоне частот помеховых сигналов.

Классическими способами обеспечения ЭМС являются фильтрация, экранирование и заземление, тесно связанные между собой. Для помехозащиты традиционно используется установка на входе защищаемого изделия устройств на основе сосредоточенных компонентов (в виде сборок из  $RLC$ -цепей, варисторов, разрядников, TVS-диодов и др.). Еще одним, сравнительно новым способом защиты является разложение помехового сигнала большой амплитуды на серию импульсов меньшей амплитуды, представляющую значительно меньшую опасность для РЭС по сравнению с исходным помеховым сигналом. Это разложение возможно за счет «полезного» использования взаимных связей в линиях передачи. При этом линиями передачи применительно к РЭС могут выступать межблочные кабели, печатные дорожки и другие монтажные соединения (межсоединения). Эти соединения, помимо электрических характеристик, отличаются по важным для ЭМС показателям: волновому сопротивлению, скорости распространения электромагнитной волны, эффективности экранирования и т. д. Следовательно, при проектировании таких соединений необходимо тщательно учитывать требования ЭМС для получения конечного изделия, удовлетворяющего этим требованиям на всем протяжении жизненного цикла самого соединения и всего изделия.

Перекрестные наводки в линиях передачи представляют собой электромагнитные помехи, обусловленные близостью расположения проводников линии и других компонентов РЭС. Их необходимо учитывать при проектировании, в том числе за счет контроля взаимовлияний между всеми проводниками. При квазистатическом анализе это реализуется посредством вычисления матриц погонных параметров линии передачи. Эти матрицы интегрально содержат всю необходимую информацию для последующего анализа, в том числе целостности сигналов и питания.

При проектировании элементов РЭС с учетом ЭМС необходимо также учитывать частотную зависимость их параметров, а также потери в проводниках и диэлектриках. Вследствие расширения спектра полезных и помеховых сигналов количество вторичных вычислений существенно возрастает. Для обеспечения ЭМС целесообразен выбор рационального расположения проводников, например с целью экранирования одних проводников другими. При этом необходимо контролировать волновое сопротивление для обеспечения основных функций проектируемой линии передачи. Как следует из вышеизложенного, проектирование линий передачи посредством многовариантного анализа или оптимизации является нетривиальной задачей.

Последним, но не менее важным аспектом обеспечения ЭМС при проектировании является выбор соответствующей схемы заземления. Так, наиболее благоприятная организация сплошных полигонов земли, как правило, является экономически невыгодной и технологически невыполнимой. Например, необходимость переходных отверстий на печатных платах нарушает целостность системы заземления, следовательно, необходим поиск оптимальных технических решений ее организации. Кроме того, особенности заземления оказывают существенное влияние на внутреннюю электромагнитную обстановку внутри проектируемого РЭС. Так, способ заземления экранирующего проводника на печатной плате существенно влияет на перекрестные наводки, что сказывается на обеспечении ЭМС РЭС в целом.

Поиск оптимального решения задачи проектирования РЭС приводит к необходимости применения параметрического синтеза, осуществляемого средствами многовариантного анализа в диапазоне параметров или оптимизации. При этом из-за сложности проектируемых РЭС и необходимости учета требований ЭМС анализ и оптимизация невозможны без применения методов вычислительной электродинамики (одним из которых является метод моментов), поскольку имеющиеся аналитические выражения пригодны только для простых структур (например, одиночных и связанных линий передачи). В основе этих методов лежит замена непрерывных функций их дискретными аналогами (построение сетки), что

часто сводит задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). С учетом требований ЭМС возрастает порядок (определяется сложностью моделируемого объекта и окружающего его пространства) и количество решаемых систем уравнений (определяется верхней частотой помехового сигнала, количеством и диапазоном оптимизируемых параметров и др.). Это резко увеличивает вычислительные затраты, что становится главной преградой для эффективного проектирования РЭС.

## **1.2 Автоматизированное проектирование**

Появление первых САПР датируется концом 60-х гг. XX в., а конец 80-х гг. ознаменовался началом их интенсивного развития, и прежде всего в части электромагнитного анализа. Сегодня эти системы находятся в стадии расцвета. История развития отечественных и зарубежных САПР СВЧ-устройств до 2010 г. достаточно полно отражена в [3]. Следует отметить, что отечественные САПР, к сожалению, до сих пор не так распространены, как зарубежные. При этом их развитие основано в большей степени на энтузиазме разработчиков.

Для численного анализа какой-либо физической задачи необходимо построить ее математическую модель, учитывающую существенные для данной задачи особенности реального объекта (процесса или явления). Математическая модель не идентична исследуемому объекту, а является его приближенным описанием с помощью языка математики и реализуемых на компьютере алгоритмов. В зависимости от универсальности, адекватности, точности и экономичности модели могут различаться по их сложности и требованиям к вычислительным ресурсам.

Процесс построения математической модели для анализа электромагнитных задач формально можно представить в виде нескольких взаимосвязанных этапов [4] (в скобках указаны возможные варианты).

1. Постановка задачи. Определение целей расчета, класса решаемой задачи, необходимой для этого входной и выходной информации, а также требуемой погрешности результатов.

2. Аналитическая обработка. Формулировка уравнений (уравнения Максвелла в частотной или временной области), условий (начальных, граничных), описание формы (геометрические параметры) и свойств (электрофизические параметры) расчетной области, выбор метода решения (аналитический, численный), при необходимости преобразование уравнений к виду, наиболее пригодному для выбранного метода (Пуассона, волновое).

3. Дискретизация модели (построение сетки). Переход от функциональных уравнений к СЛАУ (с плотной или разреженной матрицей) с помощью замены непрерывных функций их дискретными аналогами.

4. Решение СЛАУ. На этом этапе важную роль играет выбор как типа (прямой, итерационный), так и самого метода решения (LU-разложение, Якоби), наиболее подходящего для сформированной СЛАУ и обеспечивающего требуемую точность.

5. Обработка результатов. Вычисление из решения СЛАУ требуемых значений характеристик и параметров (напряженность электрического поля, поверхностный заряд) исследуемого объекта и при необходимости их визуализация. Формирование общего решения задачи (частотный/временной отклик на заданное воздействие, эффективность экранирования).

Подчеркнем, что данная градация условна и только облегчает процесс систематизации информации. Так, например, при использовании явной схемы решения дифференциальных уравнений методом конечных разностей не требуется формирование СЛАУ, а вычисления основаны на итерационном уточнении компонентов решения. Тогда этапы 3 и 4 могут быть реорганизованы в один, на котором происходит явное решение сформированного на этапе 2 уравнения. Для примера на рисунке 1.1 показана последовательность построения математической модели (workflow) и передачи данных в системе Altair FEKO для получения результатов моделирования [5]. Видно, что в данном случае выделено 7 этапов, а не 5, как показано выше. При этом функционально они идентичны.

Очевидно, что указанные этапы взаимосвязаны. Так, выбор метода построения сетки влияет на свойства формируемой СЛАУ, что сказывается на выборе метода ее решения (прямой или итера-

ционный) и тем самым на его времени. Одной из самых важных характеристик используемой математической модели является погрешность требуемых результатов.

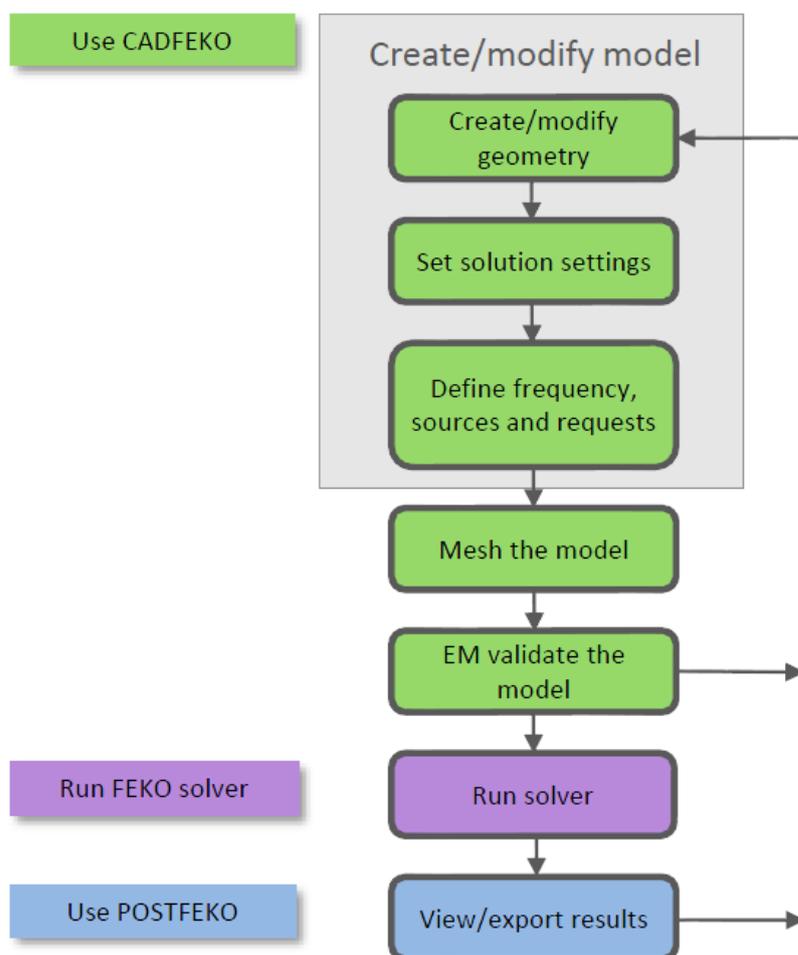


Рисунок 1.1 – Последовательность работ в системе Altair FEKO

Она складывается из нескольких составляющих, вносимых на каждом этапе: погрешностей задания исходных данных на этапе 1, самой модели (неполное соответствие реальному объекту), дискретизации (грубая сетка, погрешности численного интегрирования) и вычислительной (округление при оперировании с числами с конечной точностью на этапах 4 и 5). При решении СЛАУ основополагающим является наличие погрешности в задании элементов матрицы и правой части.

На этапе постановки задачи с учетом имеющихся данных и требований к точности необходимо определить, какой подход будет использован: схмотехнический, квазистатический или

электродинамический. В их рамках применяются эвристические, аналитические, численные и комбинированные (комплексные) методы [6, 7]. Схемотехнический подход основан на законах Кирхгофа, а моделирование с его помощью выполняется с использованием принципиальных электрических схем (SPICE-моделирование). Электродинамический подход, основанный на решении уравнений Максвелла, является универсальным и позволяет решать задачи с произвольной геометрией, однако при этом требования к вычислительным ресурсам могут оказаться чрезвычайно высокими. Промежуточное положение занимает квазистатический подход, основанный на допущениях, что поперечные размеры рассматриваемой системы много меньше длин волн распространяющихся в ней сигналов, что позволяет рассматривать наличие только основной Т-волны (ТЕМ-волны), не рассматривая волны высшего типа. Распределения полей вычисляются из электро- и магнитостатических задач, требующих решения уравнения Пуассона – Лапласа. Этот подход получил широкое распространение при моделировании линий передачи с помощью телеграфных и производных от них уравнений [8].

### **1.3 Уравнения Максвелла**

Схемотехническое моделирование используют, когда геометрические размеры моделируемого объекта малы по сравнению с длиной волны из рассматриваемого диапазона частот. При этом полагается, что уровни электромагнитного излучения пренебрежимо малы, и можно использовать анализ, основанный на схемах из сосредоточенных элементов. Когда геометрические размеры объекта сопоставимы с длинами волн рассматриваемого диапазона, проводники, кабели, соединители, переходные отверстия и прочие объекты начинают действовать подобно антеннам, излучающим или принимающим электромагнитную энергию. Поэтому схемотехнический подход становится неприемлемым и необходимо применять электродинамический подход (или в частных случаях квазистатический). Данный подход основан на решении уравнений Максвелла – системе из 4 уравнений (современная

трактовка) в дифференциальной или интегральной форме, связывающих электромагнитное поле ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ) с распределениями тока и заряда ( $\mathbf{J}$ ,  $\rho$ ) и характеристиками заполняющей среды объекта ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ). Уравнения Максвелла приведены в таблице 1.1, где  $\nabla$  – оператор набла;  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля (В/м);  $\mathbf{D}$  – вектор электрической индукции или электрического смещения (Кл/м<sup>2</sup>);  $\mathbf{H}$  – вектор напряженности магнитного поля (А/м);  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции (Тл);  $\rho$  – объемная плотность стороннего электрического заряда (Кл/м<sup>3</sup>);  $\mathbf{J}$  – вектор плотности электрического тока (А/м<sup>2</sup>);  $\epsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость (Ф/м);  $\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость (Гн/м).

Таблица 1.1 – Уравнения Максвелла во временной области

Дифференциальная форма	Интегральная форма	Название
$\nabla \times \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$	$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t) d\mathbf{S}$	Теорема о циркуляции магнитного поля
$\nabla \times \mathbf{E} = \text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$	$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$	Закон индукции Фарадея
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{D} = \rho$	$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_v \rho dv$	Закон Гаусса
$\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{div} \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$	Закон Гаусса для магнитного поля

Оператор набла в декартовой системе координат определяется следующим образом:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – единичные векторы по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. В дополнение к приведенным четырем уравнениям используются три материальных уравнения:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E};$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H};$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E},$$

где  $\gamma$  – удельная проводимость среды (См/м).

При изучении большинства физических процессов зачастую свойства объекта исследования описываются функциями не одной, а нескольких переменных величин. Поэтому при поиске количественного описания физического явления обычно решается система дифференциальных уравнений с частными производными. Аргументами неизвестных функций таких систем уравнений являются пространственные переменные и время. Тогда дифференциальные уравнения с частными производными, описывающие реальные физические модели, называются уравнениями математической физики, а изучающая их наука – математической физикой.

Большое число задач, связанных с анализом физических (и не только физических) полей, описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. К сожалению, во многих случаях, представляющих практический интерес, найти аналитическое решение таких задач трудно или невозможно. Это обычно обусловлено сложной формой или неоднородностью свойств области, в которой отыскивается решение. Однако результат можно получить численно с помощью компьютера. Подходы к решению дифференциальных уравнений в частных производных определяются их математической формой. Поэтому рассмотрим сначала некоторые полезные для дальнейшего изложения понятия, а затем классификацию уравнений в частных производных и методов их решения.

## **1.4 Дифференциальные уравнения в частных производных**

Во многих случаях для описания физических процессов используют уравнения с частными производными до второго порядка включительно. Так, например, свободные колебания различной природы представляются волновыми уравнениями вида

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где  $u(x, y, z, t)$  – функция, описывающая волновой процесс;  $x, y, z$  – координаты;  $c$  – скорость распространения волны в данной среде;  $t$  – время. Выражение  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$  носит название оператора

Лапласа и обозначается  $\nabla^2$ .

Процессы распространения тепловой энергии описываются уравнением теплопроводности

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = Q, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  и  $C$  – плотность и теплоемкость вещества соответственно;  $T$  – температура;  $k$  – коэффициент теплопроводности;  $Q$  – мощность источников тепла.

Анализ стационарных состояний, например статических тепловых, электрических, магнитных полей или деформаций при статических нагрузках, проводят, используя уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z), \quad (1.3)$$

где  $u(x, y, z)$  – функция, описывающая статическое поле;  $f(x, y, z)$  – распределенные источники. Если  $f(x, y, z) = 0$ , то выражение (1.3) обращается в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.4)$$

Известны и другие виды задач и соответствующие им дифференциальные уравнения в частных производных, например уравнение диффузии или уравнение Гельмгольца.

Несмотря на различие процессов, описываемых рассмотренными уравнениями, и форм их записи, все они с математической точки зрения могут быть представлены как частные случаи обобщенной формы дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными  $x$  и  $y$ :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0, \quad (1.5)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  – некоторые функции, зависящие в общем случае от  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $\partial u/\partial x$  и  $\partial u/\partial y$ , причем  $A$ ,  $B$  и  $C$  одновременно не обращаются в ноль. Дифференциальные уравнения, описывающие физические поля, могут быть нелинейными. Однако на практике многие задачи рассматриваются в линейном приближении, когда уравнение с частными производными линейно относительно неизвестной функции  $u$  и ее частных производных.

На основании того что уравнению (1.5) можно поставить в соответствие квадратичную форму  $A\zeta_1^2 + B\zeta_1\zeta_2 + C\zeta_2^2 = 0$ , по математической природе различают следующие типы уравнений:

– гиперболические, если  $B^2 - 4AC > 0$ , их аналогом является волновое уравнение (1.1);

– параболические, если  $B^2 - 4AC = 0$ , их аналог уравнение теплопроводности (1.2);

– эллиптические, если  $B^2 - 4AC < 0$ , их аналог уравнение Пуассона (1.3) или Лапласа (1.4).

Приведенная классификация позволяет определить общие подходы к решению дифференциальных уравнений в задачах, различных по физической сути, но сходных с математической точки зрения. В задачах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, важной составляющей, помимо самого уравнения, является формулировка дополнительных условий. Для задач с уравнениями гиперболического или параболического типа, содержащих в качестве независимой переменной время  $t$ , условия по времени обычно формулируются как начальные, описывающие исходное состояние системы. По координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$  задают граничные условия. В тепловых задачах они, например, описывают распределение температуры на границе расчетной области. В задачах с уравнениями эллиптического типа, не содержащими переменную  $t$ , используют только граничные условия по координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а саму задачу называют краевой.

Если краевое условие задает распределение функции  $u$  на границе, то его принято называть условием Дирихле. Условие, определяющее производную на границе расчетной области, называют условием Неймана. Условия, представляющие собой комбинацию двух вышеназванных, называют смешанными.

## 1.5 Интегральные уравнения

Под интегральными понимают уравнения, в которых неизвестная функция  $\Phi$  независимого (скалярного или векторного) аргумента встречается под знаком интеграла. Термин «интегральное уравнение» ввел в употребление в 1886 г. немецкий математик Поль Дюбуа-Рейман. Различают линейные и нелинейные интегральные уравнения в соответствии с тем, зависит уравнение от неизвестной функции линейным или нелинейным образом. Построение общей теории линейных интегральных уравнений было начато в конце XIX в. Ее основоположниками считаются Вито Вольтерра, Эрик Эвир Фредгольм, Давид Гильберт и Эрхард Шмидт. Простыми примерами интегральных уравнений являются интегральные преобразования Фурье, Лапласа и Ганкеля. Так, одной из первых была задача обращения интеграла

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{jux} dx,$$

т. е. по известной функции  $F(u)$  требуется найти функцию  $f(x)$ . Как известно, первым решил эту задачу в 1811 г. Ж. Фурье. Функция  $f(x)$  определяется следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{-jux} du.$$

Последние два выражения называются прямым и обратным преобразованием Фурье соответственно.

Линейные интегральные уравнения, которые наиболее часто подлежат рассмотрению, делятся на два класса, названные в честь Фредгольма и Вольтерра. (Наиболее распространенными представителями нелинейных интегральных уравнений являются

уравнения Урысона и уравнения Гаммерштейна. Данные уравнения далее не рассматриваются.) Первый класс – уравнения Фредгольма первого, второго и третьего рода соответственно:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt; \quad (1.6)$$

$$f(x) = \Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt; \quad (1.7)$$

$$f(x) = a(x)\Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\Phi(t)dt, \quad (1.8)$$

где  $a \leq t \leq b$ ,  $a \leq x \leq b$ ;  $\lambda$  – в общем случае комплексный параметр (в некоторых задачах равен единице). Функция  $K(x, t)$ , называемая ядром интегрального уравнения, и функция  $f(x)$ , а также пределы интегрирования  $a$  и  $b$  известны, а функция  $\Phi(x)$  неизвестна. Область  $S = [a, b] \times [a, b]$  изменения переменных  $x$  и  $t$  называется основным квадратом. Промежуток  $[a, b]$ , на котором ищется функция  $\Phi(x)$ , называется областью определения интегрального уравнения.

Второй класс – уравнения Вольтерра первого, второго и третьего рода соответственно:

$$f(x) = \int_a^x K(x, t)\Phi(t)dt; \quad (1.9)$$

$$f(x) = \Phi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t)\Phi(t)dt; \quad (1.10)$$

$$f(x) = a(x)\Phi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t)\Phi(t)dt \quad (1.11)$$

с переменным верхним пределом интегрирования. При этом  $K(x, t) = 0$  при  $t > x$ .

Если  $f(x) = 0$ , то уравнения (1.6)–(1.11) являются однородными, в противном случае – неоднородными. Еще раз отметим, что

уравнения (1.6)–(1.11) являются линейными, поскольку неизвестная функция линейна. Так, уравнение вида

$$f(x) = \Phi(x) - \int_a^b K(x, t)\Phi^2(t)dt$$

является нелинейным. Если пределы интегрирования  $a$  или  $b$  или ядро  $K(x, t)$  обращаются в бесконечность, то интегральное уравнение называют сингулярным. Если выполняется условие  $K(x, t) = K(t, x)$ , то ядро называется симметричным.

Вышеприведенная классификация одномерных интегральных уравнений возникает в теории дифференциальных уравнений естественным образом, демонстрируя тесную связь между интегральной и дифференциальной постановками задачи. Большинство обыкновенных дифференциальных уравнений может быть сведено к интегральным, но обратное неверно. Граничные условия вводятся отдельно от дифференциальных уравнений, а при интегральном уравнении они включены в него. Например, рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\Phi}{dx} = F(x, \Phi), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.12)$$

при условии  $\Phi(a) = \text{константа}$ . Оно может быть записано в виде уравнения Вольтерра второго рода. Так, после интегрирования уравнения (1.12) получим

$$\Phi(x) = \int_a^x F(x, \Phi(t))dt + c_1,$$

где  $c_1 = \Phi(a)$ . В итоге вместо уравнения (1.12) получим

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x F(x, \Phi(t))dt. \quad (1.13)$$

Любое решение уравнения (1.13) удовлетворяет исходному уравнению (1.12) и заданным граничным условиям. Таким образом, интегральная формулировка уравнения включает как само дифференциальное уравнение, так и соответствующие граничные условия.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = F(x, \Phi), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.14)$$

Его интегрирование дает

$$\frac{d\Phi}{dx} = \int_a^x F(x, \Phi(t))dt + c_1,$$

где  $c_1 = \Phi'(a)$ . Интегрирование полученного выражения дает

$$\Phi(x) = c_2 + c_1x + \int_a^x (x-t)F(x, \Phi(t))dt,$$

где  $c_2 = \Phi(a) - a\Phi'(a)$ . Тогда

$$\Phi(x) = \Phi(a) + (x-a)\Phi'(a) + \int_a^x (x-t)F(x, \Phi(t))dt. \quad (1.15)$$

Видно, как и ранее, что интегральное уравнение (1.15) обобщает собой как дифференциальное уравнение (1.14), так и граничные условия.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

### Пример 1.1

Решить интегральное уравнение Вольтерра  $\Phi(x) = 1 + \int_a^x \Phi(t)dt$ .

*Решение*

Решить уравнение можно напрямую или косвенно, найдя решение соответствующего дифференциального уравнения. Для прямого решения дифференцируем обе части заданного уравнения. В общем виде заданный интеграл имеет вид

$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt$  с переменными пределами интегрирования.

Дифференцируем его с помощью правила Лейбница (в интегральном исчислении называется правилом дифференцирования функ-

ции под знаком интеграла, зависящего от параметра, пределы которого зависят от переменной дифференцирования):

$$g'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + f(x,\beta)\beta' - f(x,\alpha)\alpha'. \quad (1.16)$$

В результате получим

$$\frac{d\Phi}{dx} = \Phi(x) \quad \text{или} \quad \frac{d\Phi}{\Phi} = dx. \quad (1.17)$$

Проинтегрировав выражение (1.17), получим  $\ln \Phi = x + \ln c_0$  или  $\Phi = c_0 e^x$ , где  $\ln c_0$  – постоянная интегрирования. Согласно решаемому интегральному уравнению  $\Phi(0) = 1 = c_0$ . Тогда  $\Phi(x) = e^x$  будет требуемое решение. Это можно проверить путем его подстановки в заданное уравнение.

Косвенный способ решения заключается в сравнении решаемого интегрального уравнения и уравнения (1.13). Так,  $a = 0$ ,  $\Phi(a) = \Phi(0) = 1$ , а  $F(x, \Phi) = \Phi(x)$ . Следовательно, соответствующее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид  $\frac{d\Phi}{dx} = \Phi$ ,  $\Phi(0) = 1$ , т. е. совпадает с уравнением (1.17), и его решение соответственно  $\Phi(x) = e^x$ .

### Пример 1.2

Составить интегральное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению  $\frac{d^2\Phi}{dx^2} - \frac{d\Phi}{dx} \sin x + e^x \Phi = x$  и начальным условиям  $\Phi(0) = 0$ ,  $\left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_{x=0} = 1$ .

*Решение*

Пусть  $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \varphi(x)$ , тогда  $\frac{d\Phi}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \int_0^x \varphi(x) dt + 1$ ,

а  $\Phi = \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + x$ . Подставив эти выражения в заданное

уравнение, получим интегральное уравнение Вольтерра второго

$$\text{рода } \varphi(x) = \int_0^x (\sin x - (x-t)e^x) \varphi(t) dt + \sin x + (1 - e^x)x.$$

### Пример 1.3

Составить интегральное уравнение, которое соответствует дифференциальному уравнению  $\Phi''' - 3\Phi'' - 6\Phi' + 8\Phi = 0$  при условии  $\Phi''(0) = \Phi'(0) = \Phi(0) = 1$ .

*Решение*

Пусть  $\Phi''' = F(\Phi, \Phi', \varphi, x) = 3\Phi'' + 6\Phi' - 8\Phi$ . Интегрирование обеих частей уравнения дает  $\Phi'' = 3\Phi' + 6\Phi - 8\int_0^x \Phi(t) dt + c_1$ , где ко-

эффициент  $c_1$  определен с помощью начальных значений, т. е.  $1 = 3 + 6 + c_1$ , следовательно,  $c_1 = -8$ . Проинтегрировав выражение, получим

$$\Phi' = 3\Phi + 6\int_0^x \Phi(t) dt - 8\int_0^x (x-t)\Phi(t) dt - 8x + c_2,$$

где  $c_2 = -2$  ( $1 = 3 + c_2$ ). Окончательно проинтегрировав обе части выражения, найдем

$$\Phi(x) = 3\int_0^x \Phi(t) dt + 6\int_0^x (x-t)\Phi(t) dt - 4\int_0^x (x-t)^2 \Phi(t) dt - 4x^2 - 2x + c_3,$$

где  $c_3 = 1$ . Таким образом, для данного дифференциального уравнения получено эквивалентное интегральное уравнение

$$\Phi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2] \Phi(t) dt.$$

### Пример 1.4

Свести дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + a_1(x) \frac{d\Phi}{dx} + a_2(x)\Phi = F(x), \quad \Phi(0) = c_0, \quad \Phi'(0) = c_1$$

к интегральному уравнению Вольтерра 2-го порядка [9].

Решение

Положим  $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \varphi(x)$ . Тогда с учетом начальных условий последовательно найдем

$$\frac{d\Phi}{dx} = \int_0^x \Phi(t)dt + c_1, \quad \Phi = \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt + c_1x + c_0.$$

При этом использована формула

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x)dx}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz.$$

Подставив полученные выражения в исходное уравнение, запишем

$$\begin{aligned} & \Phi(x) + \int_0^x a_1\Phi(t)dt + c_1a_1(x) + \\ & + \int_0^x a_2(x)(x-t)\Phi(t)dt + c_1xa_2(x) + c_0a_2(x) = F(x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \Phi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\Phi(t)dt = \\ & = F(x) - c_1a_1(x) - c_1xa_2(x) - c_0a_2(x). \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} K(x,t) &= -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)], \\ f(x) &= F(x) - c_1a_1(x) - c_1xa_2(x) - c_0a_2(x), \end{aligned}$$

найдем

$$\Phi(x) = \int_0^x K(x,t)\Phi(t)dt + f(x),$$

т. е. выражение, эквивалентное уравнению (1.10).

## 1.6 Уравнения электростатики

Электростатическое поле – это электрическое поле системы неподвижных относительно наблюдателя заряженных тел при отсутствии электрических токов. Если в системе нет намагниченных тел и магнитное поле отсутствует, то для электростатического поля справедливо  $\mathbf{J} = 0$ ,  $\mathbf{V} = 0$  и  $\mathbf{H} = 0$ . Наличие в электрическом поле свободных и распределенных в объеме зарядов привело бы к возникновению электрического тока, а поскольку  $\mathbf{J} = 0$ , то всюду  $\rho = 0$ . Поэтому существуют только заряды, распределенные по поверхностям заряженных тел.

С учетом сказанного из системы уравнений Максвелла вытекают следующие формулировки уравнений электростатики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (1.18)$$

(Аналогично магнитостатика изучает не изменяющиеся во времени магнитные поля. Так, если положить  $\partial/\partial t = 0$ , из первого и четвертого уравнений Максвелла формулируется система уравнений магнитостатики:  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ;  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ;  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ .)

Условие  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  свидетельствует, что электростатическое поле имеет безвихревой характер. Тогда согласно теореме Стокса для любого замкнутого контура имеем

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0.$$

Отсюда следует, что в электростатическом поле линейный интеграл вектора  $\mathbf{E}$ , взятый от точки  $A$  до точки  $B$ , не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется положением этих точек в данном поле. С учетом этого формулируется понятие потенциала электростатического поля. Так, потенциалу электростатического поля в точке  $A$  соответствует линейный интеграл вектора  $\mathbf{E}$ , взятый от точки  $A$  до точки  $P$ , в которой потенциал равен нулю, т. е.

$$\Phi_A = \int_A^P \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Линейный интеграл вектора  $\mathbf{E}$  вдоль некоторого пути от точки  $A$  до точки  $B$  есть разность электрических потенциалов в точках  $A$  и  $B$ , т. е.

$$\int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = \Phi_A - \Phi_B.$$

Пусть положение точки  $A$ , в которой рассматриваем потенциал  $\Phi$ , определяется ее расстоянием  $l$  от начальной точки  $O$  вдоль некоторого пути, идущего в точку  $P$ , где потенциал принят равным нулю (рисунок 1.2) [10].

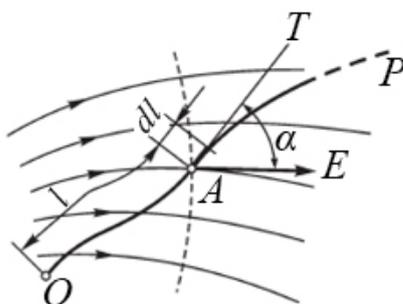


Рисунок 1.2 – К определению связи между напряженностью и изменением потенциала

Выражение для потенциала при этом можно записать в виде

$$\Phi = \int_l^{l_P} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_l^{l_P} E \cos \alpha d\mathbf{l},$$

где  $l_P$  – длина всего пути от точки  $O$  до точки  $P$ ;  $\alpha$  – угол между направлением вектора  $\mathbf{E}$  и касательной к пути. Взяв частную производную от обеих частей равенства по нижнему пределу, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = -E \cos \alpha,$$

откуда следует, что приращение потенциала, рассчитанное на единицу перемещения в каком-либо направлении, численно равно взятой с обратным знаком составляющей напряженности поля в этом направлении. Тогда в декартовых координатах получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -E_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -E_y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -E_z.$$

Если направление перемещения  $dl$  составляет прямой угол ( $\alpha = \pi/2$ ) с вектором  $\mathbf{E}$ , то  $\cos \alpha = 0$  и  $\partial\Phi/\partial l = 0$ . Следовательно, мысленно перемещаясь в направлении, нормальном к направлению линий напряженности поля, будем иметь  $\Phi = \text{const}$ , т. е. будем оставаться на поверхности равного потенциала. Линии напряженности поля нормальны к поверхностям равного потенциала. Таким образом, уравнение  $\Phi(x, y, z) = \text{const}$  определяет линии эквипотенциальных поверхностей. Линии равного потенциала пересекаются с линиями напряженности поля всюду под прямым углом.

Совмещая направление перемещения  $dl$  с направлением вектора  $\mathbf{E}$ , получим  $\alpha = 0$ , тогда

$$\cos \alpha = 0 \text{ и } \frac{\partial\Phi}{\partial l} = -E.$$

Это характерное направление совпадает с нормалью к поверхности равного потенциала. Условившись обозначать перемещение  $dl$  в этом направлении через  $dn$ , получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -E.$$

Очевидно, что  $dn$  является элементом длины линии напряженности поля, причем полагаем координату  $n$  растущей в направлении вектора  $\mathbf{E}$ .

Производная от потенциала по координате имеет наибольшее значение в направлении, нормальном к поверхности равного потенциала и противоположном направлению вектора  $\mathbf{E}$ . Это наибольшее значение производной может быть изображено вектором, направленным против вектора  $\mathbf{E}$  и носящим название градиента электрического потенциала. Его обозначают символом  $\text{grad}\Phi$  или  $\nabla\Phi$ .

Таким образом, градиент потенциала равен приращению потенциала, отнесенному к единице длины и взятому в направлении, в котором это приращение имеет наибольшее значение:

$$|\text{grad}\Phi| = \left| \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|.$$

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\text{grad}\Phi$  равны между собой по величине и направлены в противоположные стороны, т. е.

$$\text{grad}\Phi = -\mathbf{E}. \quad (1.19)$$

Знак минус указывает на то, что потенциал убывает в направлении линий напряженности поля. Это является следствием определения потенциала как линейного интеграла напряженности электрического поля, взятого от рассматриваемой точки  $A$  до заданной точки  $P$ , в которой  $\Phi = 0$ . Такое определение целесообразно, так как при этом потенциал положительно заряженного тела оказывается также положительным при условии, что потенциал бесконечно удаленных точек принимается равным нулю.

Все сказанное свидетельствует, что всякое безвихревое поле есть поле потенциальное, т.е. такое, которое может быть охарактеризовано потенциальной функцией  $\Phi(x, y, z)$ . Обратно, всякое потенциальное поле является безвихревым, что вытекает из тождества  $\text{rotgrad}\Phi = 0$ .

Выражение потенциала точечного заряда для однородной среды позволяет сформулировать общий способ вычисления потенциала при заданном распределении в конечной области пространства электрических зарядов. Так, разделив все распределенные в пространстве заряды на элементарные части  $dq$ , рассмотрим эти элементы  $dq$  как точечные заряды (рисунок 1.3) [10].

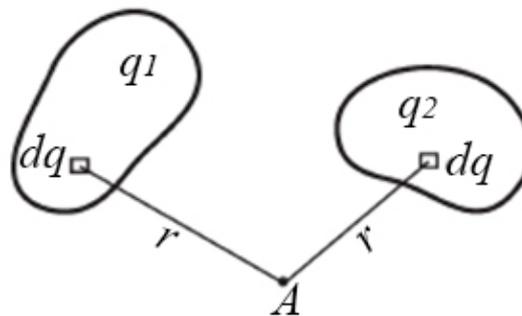


Рисунок 1.3 – К определению потенциала по заданному распределению зарядов

Потенциал в точке  $A$ , определяемый каждым таким элементом, будет  $d\Phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon r}$ . Тогда потенциал, определяемый всей

совокупностью зарядов, распределенных в пространстве, находится как

$$\Phi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq}{r}.$$

Если электрический заряд распределен по объему  $V$ , причем объемная плотность заряда в некоторой точке пространства есть  $\rho$  (Кл/м<sup>3</sup>), то следует разбить весь объем на элементы  $dV$ . Тогда

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Если заряд распределен лишь в весьма тонких слоях у поверхности заряженных тел, как это имеет место у тел из проводящего материала, то можно считать, что заряд распределен на поверхности тел. Разбивая заряженные поверхности на элементы  $dS$ , можно записать  $dq = \sigma dS$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда (Кл/м<sup>2</sup>). Тогда выражение для потенциала принимает вид

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma dS}{r},$$

причем интеграл должен быть распространен по всем заряженным поверхностям. То обстоятельство, что в объемах, занятых заряженными телами, находится проводящая среда и, следовательно, среда во всем пространстве неоднородна, в данном случае несущественно, так как внутри проводящих тел поле отсутствует. Мы могли бы мысленно убрать проводящее вещество тел, заменив его диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$  и сохранив все поверхностные заряды тел. При этом поле осталось бы без изменения.

В случае, когда заряд распределен на проводах, диаметр сечения которых мал по сравнению с расстояниями от проводов до точек поля, в которых определяется потенциал, можно считать заряд сосредоточенным на осях проводов. Если  $\tau$  – линейная плотность заряда, то  $dq = \tau dl$  и тогда

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\tau dl}{r},$$

причем интеграл распространяется вдоль всех заряженных проводов.

Следует отметить два важных аспекта. Приведенными выше формулами можно пользоваться для вычисления потенциала лишь в том случае, если заряды распределены в конечной области пространства. При этом физический смысл имеет только объемное распределение зарядов. Тем не менее, условное представление о поверхностном, линейном или точечном распределении зарядов весьма полезно при решении многих практических задач.

С учетом выражения  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  напряженность электрического поля вычисляется как

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho\mathbf{r}}{r^3} dV,$$

где  $\mathbf{r}$  – вектор, направленный от точки расположения заряда к точке определения напряженности поля и равный расстоянию между ними.

Поскольку вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  связан с вектором  $\mathbf{E}$  соотношением  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ , то

$$\mathbf{D} = -\varepsilon\nabla\Phi. \quad (1.20)$$

Если индукция создается зарядом с объемной плотностью  $\rho$ , то в соответствии с законом Гаусса

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (-\varepsilon\nabla\Phi) = \rho,$$

тогда при  $\varepsilon = \text{const}$  (диэлектрик однороден) получим

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (1.21)$$

Уравнение (1.21), устанавливающее связь между потенциалом, созданным произвольно распределенными зарядами, и объемной плотностью этих зарядов, известно как уравнение Пуассона. В частном случае, когда в рассматриваемом объеме нет зарядов, например вне проводников линии передачи, уравнение упрощается:

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (1.22)$$

Это уравнение известно как уравнение Лапласа. Задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения (1.22) для двух- или трехмерного потенциала, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Когда распределение потенциала

найденно, по нему с помощью формулы (1.19) находится структура электрического поля.

## 1.7 Граничные условия

### 1.7.1 Граничные условия на поверхности проводников

Из материального уравнения  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  следует, что внутри проводников, так как  $\gamma \neq 0$ , всюду должно быть  $\mathbf{E} = 0$  (так как в электростатическом поле электрические токи отсутствуют). Тогда из выражения  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  следует, что для каждого проводника потенциал всех его точек имеет одно и то же значение, т. е.  $\Phi = \text{const}$ . При этом поверхности проводников – это поверхности равного электрического потенциала и линии напряженности электрического поля в диэлектрике нормальны к ним. Обозначив через  $E_n$  и  $E_t$  нормальную и тангенциальную (касательную) к поверхности проводника составляющие вектора  $\mathbf{E}$  в диэлектрике около поверхности проводника, получим граничное условие для поля в диэлектрике на поверхности проводника. Так как  $\Phi = \text{const}$ , то  $E_t = 0$  и  $\mathbf{E} = E_n = -\partial\Phi/\partial n$ , поэтому

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \partial\Phi/\partial n = \sigma.$$

### 1.7.2 Граничные условия на поверхности раздела диэлектриков

Отдельно рассмотрим граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих электрического поля на поверхности раздела диэлектрик-диэлектрик.

**Граничные условия для нормальных составляющих электрического поля.** В данном случае возможны два варианта.

– Плотность поверхностных электрических зарядов равна нулю,  $\sigma = 0$ . Нетрудно показать, что при этом  $D_{n1} = D_{n2}$ , где индексы 1 и 2 обозначают среды с  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  соответственно. Тогда  $\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$ . Таким образом, при отсутствии поверхностных электрических зарядов на границе раздела двух сред нормальные составляющие индукции электрического поля будут непрерывны,

а нормальные составляющие векторов напряженности электрического поля будут испытывать скачок.

– На границе раздела равномерно распределен поверхностный электрический заряд, который имеет плотность  $\sigma \neq 0$ . Используя закон Гаусса, можно показать, что  $D_{n1} - D_{n2} = \sigma$ . Это означает, что при наличии заряженной границы раздела двух сред нормальные составляющие индукции электрического поля испытывают скачок на величину плотности поверхностного заряда.

**Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля.** С помощью закона электромагнитной индукции можно показать, что на границе раздела диэлектрик-диэлектрик тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического поля сред непрерывны, а тангенциальные составляющие индукции электрического поля претерпевают разрыв, т. е.

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad \varepsilon_2 D_{n1} = \varepsilon_1 D_{n2}.$$

## **1.8 Основная задача электростатики и теорема единственности**

Основной задачей электростатики является определение напряженности во всех точках электростатического поля при заданных зарядах или потенциалах тел, находящихся в этом поле. Если полностью задано распределение электрических зарядов в однородной и изотропной среде, то решение может быть получено методом, изложенным в подразделе 1.6. Обратная задача отыскания распределения зарядов по заданному распределению потенциала решается с помощью уравнения Лапласа и граничного условия на поверхности заряженных проводящих тел. Однако большей частью задача оказывается значительно сложнее. Обычно рассматривается система заряженных проводящих тел, окруженных диэлектриком, в котором отсутствуют объемные заряды. Заданы потенциалы всех тел (задача Дирихле) либо полные их заряды (задача Неймана) или их комбинация (задача Дирихле – Неймана). Распределение же зарядов по поверхности каждого тела неизвест-

но и подлежит определению. В этом и заключается основная трудность задачи. Такая ситуация возникает, например, при анализе линий передачи. Также неизвестным является распределение потенциала в пространстве. Особенно усложняется задача для неоднородной или неизотропной среды.

Решение такой задачи аналитическим путем в конечном виде возможно только для частных случаев. Иногда удается найти решение при помощи искусственных приемов. В связи с этим чрезвычайно важно установить необходимые и достаточные требования, при удовлетворении которых поле определяется единственным образом:

– поле в диэлектрике должно удовлетворять уравнениям (1.18). Для однородной среды эти уравнения приводятся к одному уравнению Лапласа;

– поверхности проводящих тел должны быть поверхностями равного потенциала, т. е. для каждой поверхности должно быть соблюдено условие  $\Phi = \text{const}$ ;

– потенциалы на поверхности тел должны быть равны заданным значениям  $\Phi_k$ , если по условиям задачи известны эти потенциалы. Если же заданы полные заряды тел, то для каждого тела должно быть удовлетворено условие

$$q_k = \int_{S_k} \sigma dS = - \int_{S_k} \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS.$$

Выполнение данных требований является достаточным для того, чтобы задача имела единственное решение. Это положение известно как теорема единственности.

## 1.9 Метод зеркальных изображений

Некоторые задачи электростатики можно решить аналитически, если результирующее поле обладает симметрией. В случае ее отсутствия задача существенно усложняется и при ее решении стремятся аппроксимировать рассматриваемую систему ее симметричным аналогом. Одним из методов аппроксимации является метод зеркальных изображений, применимый, когда поле ограни-

чено поверхностями (проводящими или раздела диэлектрик-диэлектрик) правильной геометрической формы. В этом случае расчет поля заряженных зарядов или проводников сводится к расчету поля нескольких зарядов или проводников при отсутствии проводящей среды. Рассмотрим особенности этого метода на конкретном примере.

Предположим, что положительный точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $h$  над идеальной проводящей и заземленной плоскостью (рисунок 1.4). Это соответствует, например, проводу, подвешенному над поверхностью земли [10].

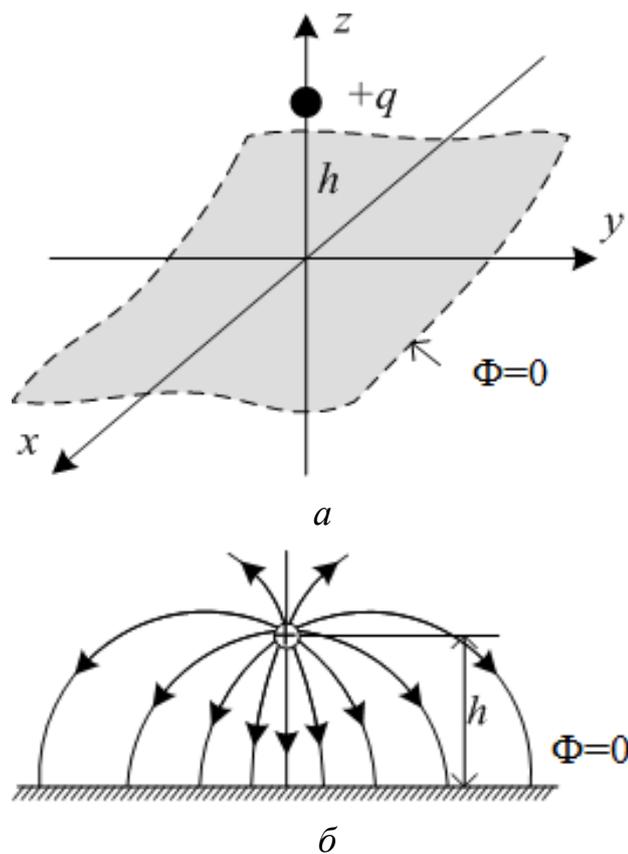


Рисунок 1.4 – Общий вид (а) и картина распределения силовых линий (б) для точечного заряда над заземленной проводящей поверхностью

Возникает вопрос, а какой потенциал будет над поверхностью земли? Ответ  $(1/4\pi\epsilon)qh$  будет неверным, так как силовые линии напряженности электрического поля, начинающиеся на положительном заряде (или заряженном проводе), заканчиваются у заземленной поверхности, где появляется индуцированный от-

рицательный заряд. Поэтому полный потенциал будет частично обусловлен как непосредственно зарядом  $q$ , так и зарядом, индуцированным на заземленной поверхности. В результате возникает другой резонный вопрос, а как рассчитать потенциал, когда неизвестно, какой заряд индуцирован на заземленной поверхности и как он распределен по ней?

С математической точки зрения эта задача заключается в том, что надо решить уравнение Пуассона в области  $z > 0$  с одним точечным зарядом  $q$  в точке  $(0, 0, h)$  при следующих граничных условиях:

- $\Phi = 0$  при  $z = 0$  (поскольку поверхность заземлена);
- $\Phi \rightarrow 0$  при удалении от точечного заряда (когда  $x^2 + y^2 + z^2 \gg h^2$ ).

Согласно теореме единственности возможное распределение заряда по поверхности проводника только одно, т. е. существует только одна функция (решение), которая удовлетворяет этим требованиям. Соответственно если каким-либо образом найти такую функцию, то она и будет являться ответом на поставленный вопрос. Для наглядности сначала рассмотрим другую задачу, особенность решения которой послужит идеей для нахождения требуемой функции.

Пусть два точечных заряда  $+q$  и минус  $q$  расположены в точках  $(0, 0, h)$  и  $(0, 0, -h)$  соответственно (рисунок 1.5). Тогда потенциал в точке  $(x, y, z)$  определяется выражением

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right], \quad (1.23)$$

где знаменатели соответствуют расстояниям от точки  $(x, y, z)$  до зарядов  $+q$  и минус  $q$  соответственно. Отсюда следует, что  $\Phi = 0$  при  $z = 0$  и  $\Phi \rightarrow 0$  при  $x^2 + y^2 + z^2 \gg h^2$ , а единственным зарядом в области, где  $z > 0$ , является точечный заряд  $+q$ . Это соответствует условиям исходной задачи.

Очевидно, что в «верхней» области ( $z \geq 0$ ) распределение заряда будет одинаковыми как в первом (см. рисунок 1.4), так и во втором (см. рисунок 1.5) случае. При этом «нижняя» область

( $z < 0$ ) будет иметь совершенно другое распределение потенциала, но для решения исходной задачи это не имеет никакого значения. Таким образом, потенциал точечного заряда над бесконечным заземленным проводником ( $z \geq 0$ ) может быть найден по выражению (1.23).

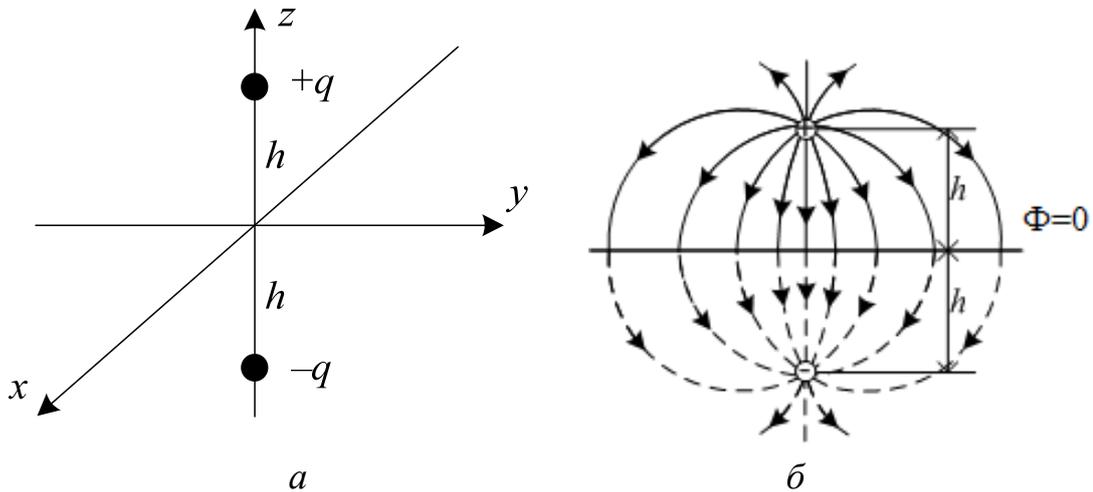


Рисунок 1.5 – Общий вид (а) и картина распределения (б) силовых линий для двух точечных зарядов

Когда потенциал найден, очень просто вычислить поверхностный заряд  $\sigma$ , индуцированный на проводнике. Рассмотрим уравнение

$$\sigma = -\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

В нашем примере нормальным направлением является направление вдоль оси  $z$ , поэтому

$$\sigma = -\varepsilon \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Тогда, используя уравнение (1.23), получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left[ \frac{-q(z-h)}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{q(z+h)}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right],$$

в результате

$$\sigma(x, y) = \frac{-qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (1.24)$$

Как и ожидалось, индуцированный заряд является отрицательным (при условии, что заряд  $q$  положительный) и наибольшим при  $x = y = 0$ .

Очевидно, что, зная плотность распределения заряда, легко найти полный индуцированный заряд:

$$Q = \int \sigma da.$$

Этот интеграл в плоскости  $xu$  может быть найден в декартовых координатах при  $da = dx dy$ , но проще использовать полярные координаты, т. е.  $r^2 = x^2 + y^2$  и  $da = r dr d\varphi$ . Тогда

$$\sigma(r) = \frac{-qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

и

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}} r dr d\varphi = \frac{qh}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Big|_0^\infty = -q. \quad (1.25)$$

Таким образом, общий заряд, индуцированный на заземленной поверхности, равен минус  $q$ .

Положительный заряд  $q$  притягивается к заземленной поверхности из-за отрицательного индуцированного заряда на ней. Оценим силу притяжения. Поскольку потенциал в окрестности расположения заряда  $q$  такой же, как и в конфигурации с двумя разноименными зарядами (см. рисунок 1.5), то одинаковы и поле, и сила притяжения:

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_2 h^2} \mathbf{z}.$$

При этом энергия в случае двух разноименных зарядов (см. рисунок 1.5) будет

$$W = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_2 h},$$

а в случае заряда над заземленной поверхностью —

$$W = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4h},$$

т. е. в два раза меньше (поскольку для конфигурации из двух зарядов обе области ( $z > 0$  и  $z < 0$ ) вносят свой вклад в суммарную энергию, а так как заряды расположены симметрично, эти области вносят одинаковый вклад).

Метод зеркальных изображений не ограничивается случаем единичного точечного заряда. Так, любое стационарное распределение заряда вблизи заземленной поверхности можно трактовать таким же образом, вводя его зеркальное изображение. При этом каждый заряд должен быть зеркально отражен с изменением знака, после чего заземленная поверхность может быть мысленно удалена. Тогда плоскость, расположенная на месте удаленной поверхности, является поверхностью равного потенциала, так как заряды противоположных знаков размещены симметрично относительно нее. Поэтому найденное поле будет соответствовать полю над заземленной поверхностью.

Рассмотренный метод зеркальных изображений может использоваться, когда заземленная поверхность образована двумя плоскостями, сходящимися под углом  $\alpha = \pi/n$ , где  $n$  – целое число. При этом пространство разделяется на одинаковые части плоскостями, пересекающимися под углом  $\alpha$ , и, последовательно отражая заряд в этих плоскостях, получают систему из действительного заряда и серии его зеркальных изображений. Кроме того, этот метод применим, когда плоская и заземленная поверхность разделяет две среды с различными диэлектрическими проницаемостями, а также когда источником поля является электрический заряд, распределенный вдоль провода с линейной плотностью  $\tau$  [10].

### **1.10 Квазистатический подход и линии передачи**

С помощью уравнений Максвелла можно получить решение для системы любой сложности, но это, как правило, сопровождается значительными вычислительными затратами. На практике

часто используют мощные вычислительные кластеры (вычислительные центры, суперкомпьютеры) или прибегают к различного рода упрощениям, одним из которых является использование квазистатического подхода. Данный подход (также называемый Т- или ТЕМ-аппроксимацией) применяют, когда поперечные размеры рассматриваемой системы (структуры) малы по сравнению с длиной распространяющейся электромагнитной волны [11]. Например, в большинстве линий передачи (устройств, ограничивающих область распространения электромагнитных колебаний и направляющих поток сверхвысокочастотной электромагнитной энергии в заданном направлении<sup>1</sup>) распространяются поперечные ТЕМ- или квази-ТЕМ-волны, где электрические и магнитные поля перпендикулярны (или почти перпендикулярны) к направлению распространения. Такой подход позволяет упростить уравнения Максвелла, в частности пренебречь током смещения в законе полного тока Ампера. В результате требуется решение не уравнений Максвелла, а уравнения Пуассона – Лапласа. Квазистатический подход применим в диапазоне от постоянного тока до частот 10 ГГц [12].

Характерное поперечное сечение линии передачи, в данном случае воздушной микрополосковой, показано на рисунке 1.6. Распространение ТЕМ-волны существует на любой частоте. Однако выше определенной частоты также распространяются и высшие типы волн. Линиями передачи с ТЕМ-волной являются коаксиальные, микрополосковые, полосковые, копланарные и др. Линиями передачи, не относящимися к ТЕМ-линиям, являются полый круглый или прямоугольный металлические волноводы.

Квазистатический подход получил широкое распространение при математическом моделировании линий передачи, в общем случае многопроводных, применяемых, например, в системах кабельного и воздушного электроснабжения. Особенностью таких линий является необходимость учета распределенности их параметров, что находит отражение при решении проектных и эксплуатационных задач, например при определении мест короткого замыкания. Частным случаем МПЛП являются различные полос-

---

<sup>1</sup> ГОСТ 18238-72. Линии передачи сверхвысоких частот. Термины и определения.

ковые структуры, которые широко используются для создания элементов РЭС: печатных плат, фильтров, средств снижения уровня перекрестных помех или их компенсации, устройств защиты, фазовращателей, антенн, линий задержки, высокоскоростных межсоединений и пр.

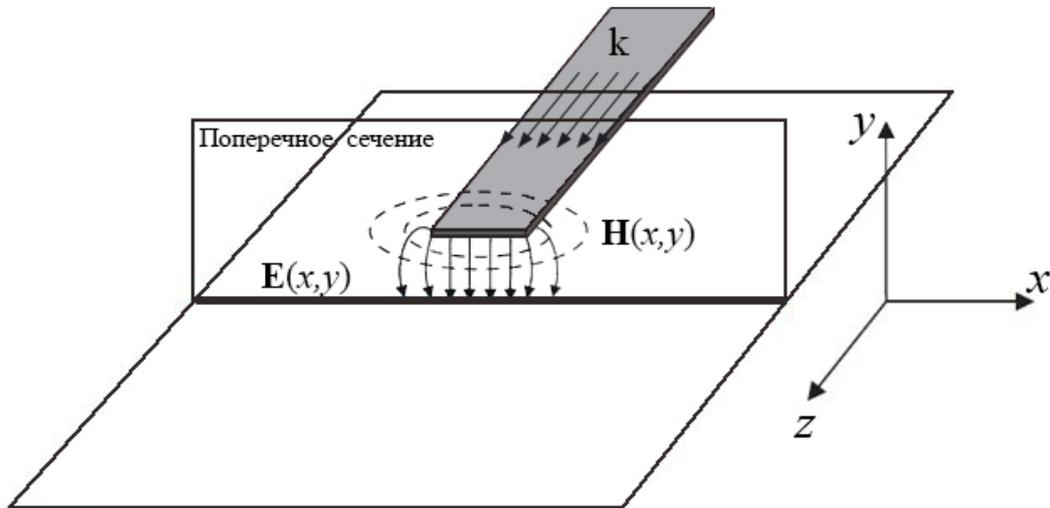


Рисунок 1.6 – Общий вид воздушной микрополосковой линии передачи

При квазистатическом подходе электрические характеристики, меняющиеся вдоль отрезков МПЛП длиной  $dx$ , описываются матрицами погонных первичных параметров  $\mathbf{R}$  (Ом/м),  $\mathbf{L}$  (Гн/м),  $\mathbf{C}$  (Ф/м) и  $\mathbf{G}$  (См/м), или кратко  $\mathbf{RLCG}$ -параметрами. Отдельно отметим, что вычисление (экстракция) этих матриц (в частности,  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{C}$ ) является важной задачей при проектировании с учетом паразитных параметров выводов интегральных схем, а случайные вариации их параметров в технологическом процессе вынуждают многократно вычислять эти матрицы. Вычисленные матрицы затем используются при решении телеграфных уравнений Хевисайда или производных от них для анализа целостности сигналов, получения временного отклика и других параметров.

В случае неучета потерь в проводниках и диэлектриках, из которых состоит линия передачи, вычисляются только матрицы  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{C}$ . Эти потери объясняются неидеальностью материалов, выражающейся частотной зависимостью электрофизических параметров линии (относительных диэлектрической и магнитной

проницаемостей), скин-эффектом (ток высокой частоты протекает преимущественно в тонком поверхностном слое проводника), эффектом близости (притяжение противоположных токов в соседних проводниках) и угловым эффектом (сжатие тока вблизи углов проводника). Таким образом, строгое решение уравнений Максвелла сводится к двум независимым граничным задачам электростатики и магнитостатики, определяющим поведение поперечных электрических и магнитных компонентов поля. При этом решение первой задачи дает матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{G}$ , а второй –  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{R}$ . Для экономии вычислительных затрат часто прибегают только к решению электростатической задачи, а из вычисленной матрицы  $\mathbf{C}$  находят  $\mathbf{L}$  и затем  $\mathbf{R}$ . При этом вычисленная матрица  $\mathbf{L}$  является частотно-независимой и тем самым лишь приближенной. На практике это приемлемо, например, при проектировании интегральных схем, поскольку частоты сигналов не так высоки и индуктивные эффекты проявляются слабо.

Для пояснения процесса вычислений рассмотрим уравнение Пуассона (дифференциальная форма)

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon,$$

где  $\varphi$  – электростатический потенциал;  $\rho$  – объемная плотность заряда. При отсутствии в анализируемой области свободных зарядов данное уравнение сводится к уравнению Лапласа. Для нахождения волнового сопротивления и других параметров одиночной линии передачи с неоднородным диэлектрическим заполнением без потерь необходимо определить погонную емкость с диэлектрическим заполнением  $C$  и без него (без границ диэлектрик-диэлектрик)  $C_0$ . Волновое сопротивление линии передачи без потерь определяется как

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (1.26)$$

где  $L$  – погонная индуктивность;  $C$  – погонная емкость. Для нахождения индуктивности можно воспользоваться выражением

$$L = \mu_0 \varepsilon_0 C_0^{-1}.$$

При этом фазовая скорость определяется как

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad u = c \sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\text{reff}}}}, \quad (1.27)$$

где  $c$  – скорость света в свободном пространстве;  $\varepsilon_{\text{reff}} = C/C_0$  – эффективная относительная диэлектрическая проницаемость.

В случае простых конфигураций линии можно воспользоваться известными аналитическими выражениями [13]. Для сложных МПЛП такие выражения отсутствуют или имеют ограниченную точность и необходимо прибегать к помощи численных методов.

В общем случае величины  $L$  и  $C$  в приведенных выражениях являются матрицами погонных коэффициентов электростатической ( $\underline{C}$ ) и электромагнитной ( $\underline{L}$ ) индукции [14]. Также матрицу  $\underline{C}$  часто называют емкостной матрицей Максвелла, узловой емкостной матрицей и погонной емкостной матрицей (для краткости далее емкостная матрица). Поясним особенности вычисления емкостной матрицы  $\underline{C}$  на примере трехпроводной линии передачи, поперечное сечение которой приведено на рисунке 1.7.

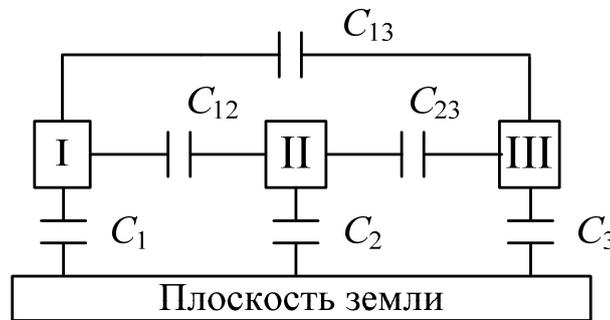


Рисунок 1.7 – Поперечное сечение трехпроводной линии передачи

Рассмотрим задачу нахождения погонных зарядов  $Q$  при известных потенциалах на них [10]. На практике часто потенциал опорного проводника (плоскости земли) устанавливается равным нулю. Разности потенциалов между ним и проводниками обозначим  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ , а между проводниками –  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{13}$  и  $\Phi_{23}$ . Тогда

$$Q_I = C_1 \Phi_1 + C_{12} \Phi_{12} + C_{13} \Phi_{13},$$

$$Q_{II} = C_{21} \Phi_{12} + C_2 \Phi_2 + C_{23} \Phi_{23},$$

$$Q_{III} = C_{31}\Phi_{13} + C_{32}\Phi_{23} + C_3\Phi_3.$$

Перепишем эту систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} Q_I &= C_1\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + C_{13}(\Phi_1 - \Phi_3) = \\ &= (C_1 + C_{12} + C_{13})\Phi_1 - C_{12}\Phi_2 - C_{13}\Phi_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{II} &= C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_2\Phi_2 + C_{23}(\Phi_2 - \Phi_3) = \\ &= -C_{21}\Phi_1 + (C_2 + C_{21} + C_{23})\Phi_2 - C_{23}\Phi_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{III} &= C_{31}(\Phi_3 - \Phi_1) + C_{32}(\Phi_3 - \Phi_2) + C_3\Phi_3 = \\ &= -C_{31}\Phi_1 - C_{32}\Phi_2 + (C_3 + C_{31} + C_{32})\Phi_3, \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\mathbf{Q} = \underline{\mathbf{C}}\Phi,$$

где

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}} &= \begin{pmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{13} \\ \underline{C}_{21} & \underline{C}_{22} & \underline{C}_{23} \\ \underline{C}_{31} & \underline{C}_{32} & \underline{C}_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C_1 + C_{12} + C_{13} & -C_{12} & -C_{13} \\ -C_{21} & C_2 + C_{21} + C_{23} & -C_{23} \\ -C_{31} & -C_{32} & C_3 + C_{31} + C_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\underline{C}_{ij}$  называются коэффициентами электростатической индукции – собственными при одинаковых индексах и взаимными при разных индексах. Они имеют размерность погонной емкости [15]. Несмотря на отрицательный знак у внедиагональных элементов матрицы  $\underline{\mathbf{C}}$ , емкость между отдельным проводником и плоскостью земли положительна. Тогда матрица  $\mathbf{L}$  вычисляется как

$$\mathbf{L} = \mu_0\varepsilon_0\underline{\mathbf{C}}_0^{-1}.$$

При учете потерь в проводниках и диэлектриках волновое сопротивление МПЛП описывается комплексной матрицей

$$\mathbf{Z} = \sqrt{\frac{\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}}{\mathbf{G} + j\omega\underline{\mathbf{C}}}}$$

порядка  $N_{\text{COND}}$  – число проводников МПЛП, не считая опорного. Для вычисления матрицы  $\mathbf{G}$  используется та же модель, что и для

матрицы  $\mathbf{C}$ , с той лишь разницей, что диэлектрическая проницаемость  $i$ -го подынтервала заменяется на комплексную с использованием тангенса угла потерь  $\underline{\epsilon}_r = \underline{\epsilon}_r' - j\underline{\epsilon}_r'' = \underline{\epsilon}_r'(1 - j\tan\delta)$ , где  $\tan\delta = \underline{\epsilon}_r''/\underline{\epsilon}_r'$ ;  $\sigma$  – удельная проводимость диэлектрика.

Нахождение матрицы  $\mathbf{R}$  представляет собой сложную задачу. Так, для нетиповых структур часто прибегают к ее измерениям или различного рода упрощениям. Для ее вычисления разработано несколько подходов разной степени сложности, пригодных только для некоторых частотных диапазонов. С точки зрения минимизации вычислительных затрат на вычисление матрицы  $\mathbf{R}$  выделяется работа [16], где представлено обобщение на случай МПЛП результатов для одиночных линий передачи, использующих правило дифференциальной индуктивности (incremental inductance rule). Рассмотрим ее основные результаты.

В случае одиночной линии передачи потери (омические) в проводнике определяются как

$$R = \frac{1}{\mu_0} \sum_j R_{sj} \frac{\partial L}{\partial n_j}, \quad R_{sj} = \sqrt{\pi f \mu \rho_{sj}},$$

где  $\partial L/\partial n_j$  – производная индуктивности при небольшой вариации (возмущения)  $j$ -й границы поверхности проводника к его центру (сужение проводника);  $n_j$  – вектор нормали к границе  $j$ ;  $R_{sj}$  – поверхностное сопротивление слоя вариации для этой границы (рисунок 1.8);  $\rho_{sj}$  – удельное сопротивление проводника с границей  $j$ .

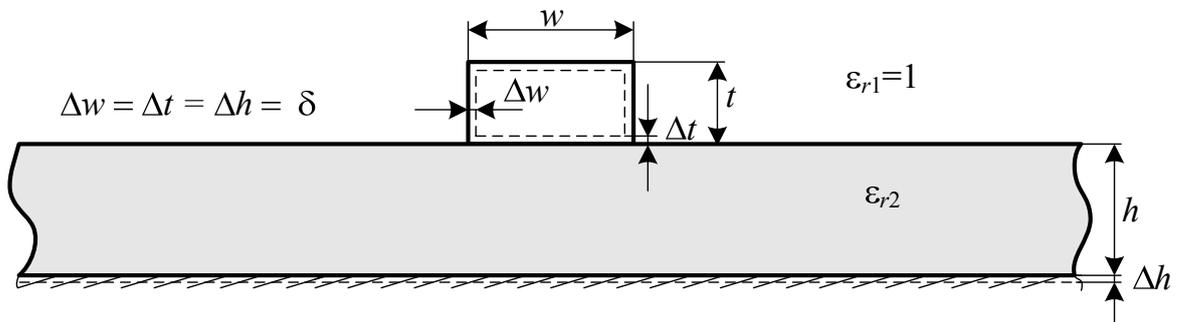


Рисунок 1.8 – Пояснение вариации границ проводников

В работе [16] предложено не сужать границы проводников, а наоборот, расширять, что позволило обобщить данный подход

на случай МПЛП и получить более точные результаты. Элементы матрицы  $\mathbf{R}$  вычисляются как

$$R_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \sum_j R_{sj} \frac{-\partial L_{ii}}{\partial n_j}, & \text{если } i = k; \\ \frac{1}{\mu_0} \sum_j R_{sj} \frac{-\partial L_{ik}}{\partial n_j}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При  $i = k$  возмущения применяются к  $i$ -му и опорному проводникам, а в противном случае – только к опорным.

Таким образом, особый интерес для минимизации затрат времени на получение всех первичных параметров МПЛП представляет вычисление емкостной матрицы, поскольку, как было показано выше, остальные три матрицы являются ее производными. Поэтому в последующих разделах особое внимание уделяется именно вычислению емкостной матрицы.

## Контрольные вопросы и задания

1. Опишите процесс построения математической модели для анализа электромагнитных задач.
2. Запишите уравнения электростатики.
3. В чем различие между уравнениями Лапласа и Пуассона?
3. Как классифицируются дифференциальные уравнения в частных производных?
4. Классифицируйте интегральное уравнение

$$\Phi(x) = 2 - \int_0^x \Phi(t) dt.$$

5. Поясните основные положения квазистатического подхода.
6. Почему внедиагональные элементы емкостной матрицы имеют отрицательные значения?
7. Опишите граничные условия на поверхности проводников и диэлектриков.
8. Когда применим метод зеркальных уравнений?
9. Опишите процесс вычисления погонных параметров линии передачи.