

М.В. РЫЖОВА, магистрант каф. ТУ, ТУСУР, Томск
С.П. КУКСЕНКО, канд. техн. наук, доцент каф. ТУ,
ТУСУР, Томск

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АДАПТИВНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Рассмотрено использование адаптивной перекрестной аппроксимации для уменьшения вычислительных ресурсов при решении задач рассеяния электромагнитных волн проводящими структурами методом моментов. На примере решения тестовых задач за счет компрессии данных показано существенное сокращение времени вычислений (до 3 раз) и объема требуемой памяти (до 6 раз) при контролируемой точности.

Метод моментов – эффективный численный способ решения интегральных уравнений, возникающих при моделировании проводящих объектов произвольной формы [1]. Однако матрица СЛАУ ($\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V}$), к решению которой сводится задача, является плотной. При этом хранение, заполнение и операции с матрицей \mathbf{Z} имеют сложность $O(N^2)$, а ее решение методом Гаусса (часто применяемым для решения СЛАУ с плотной матрицей) – $O(N^3)$, где N – количество неизвестных. Поэтому актуален поиск способов экономии вычислительных ресурсов. Одним из них является адаптивная перекрестная аппроксимация (АСА) [2].

Цель работы – исследование использования адаптивной перекрестной аппроксимации при решении задач рассеяния электромагнитной волны проводящими поверхностями методом моментов.

Суть АСА заключается в представлении некой матрицы \mathbf{S} в виде произведения матриц \mathbf{U} и \mathbf{V} таких, что $\mathbf{S} = \mathbf{UV} = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$,

где \mathbf{U} – матрица размера $N \times r$; \mathbf{V} – матрица размера $r \times N$ при контролируемой минимизации матрицы невязки

(ошибки). Таким образом, АСА использует аппроксимацию исходной матрицы матрицами меньшего ранга. Преимущества данного алгоритма заключаются в его алгебраическом характере. За счет методов линейной алгебры, таких как QR-разложение, сингулярное разложение, LU-разложение и другие, достигается ускорение вычислений. Благодаря тому что алгоритм имеет алгебраический характер, он может быть модульным и легко интегрироваться в различные реализации метода моментов. Однако матрица, получаемая с его помощью, обладает сингулярностью на резонансных частотах, поэтому применить АСА к исходной матрице \mathbf{Z} не представляется возможным. В то же время вследствие специфики функции Грина данная матрица состоит из блоков, соответствующих взаимодействию хорошо сепарабельных базисных функций, благодаря чему они могут быть представлены в виде иерархических матриц. Таким образом, в общем случае алгоритм АСА представляет собой многоуровневую систему сжатия матриц, что обеспечивает ускорение вычислений [3]. При этом алгоритм аппроксимирует исходную матрицу, требуя лишь частичную информацию о ней.

Для ясности дальнейшего изложения введем некоторые обозначения. Матрица \mathbf{S} – некий блок матрицы \mathbf{Z} , массивы $\mathbf{I} = [I_1, \dots, I_r]$ и $\mathbf{J} = [J_1, \dots, J_r]$ содержат упорядоченные индексы строк и столбцов матрицы \mathbf{S} , \mathbf{u}_k – k -й столбец матрицы \mathbf{U} , \mathbf{v}_k – k -й столбец матрицы \mathbf{V} . Ниже приведен алгоритм АСА с помощью синтаксиса системы MATLAB, где $\bar{\mathbf{R}}(I_1, :)$ – первый столбец матрицы $\bar{\mathbf{R}}$; $\bar{\mathbf{S}}^{(k)}$ – матрица $\bar{\mathbf{S}}$ на k -й итерации [4].

Начало алгоритма

1. Определить и присвоить индекс первой строке $I_1=1$ и установить $\bar{\mathbf{S}}=0$.

2. Определить и присвоить первой строке матрицы ошибки $\bar{\mathbf{R}}(I_1, :) = \mathbf{S}(I_1, :)$.

3. Определить индекс первого столбца J_1 : $|\bar{\mathbf{R}}(I_1, J_1)| = \max_j (|\bar{\mathbf{R}}(I_1, J_1)|)$.

4. $\mathbf{v}_1 = \bar{\mathbf{R}}(I_1, :)/\bar{\mathbf{R}}(I_1, J_1)$.

5. Определить первый столбец матрицы ошибки $\bar{\mathbf{R}}(:, J_1) = \mathbf{S}(:, J_1)$.

$$6. \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{R}}(I_1, J_1).$$

$$7. \|\bar{\mathbf{S}}^{(1)}\|^2 = \|\bar{\mathbf{S}}^{(0)}\|^2 + \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_1\|^2.$$

8. Найти индекс второй строки I_2 :

$$|\bar{\mathbf{R}}(I_2, J_1)| = \max_i (|\bar{\mathbf{R}}(i, J_1)|), \quad i \neq I_1.$$

Для k -й итерации:

1. Обновить (I_k) столбец матрицы ошибки

$$\bar{\mathbf{R}}(I_k, :) = \mathbf{S}(I_k, :) - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{u}_i)_{I_k} \mathbf{v}_i.$$

2. Найти k -й индекс столбца J_1

$$|\bar{\mathbf{R}}(I_k, J_k)| = \max_j (|\bar{\mathbf{R}}(I_k, j)|), \quad j \neq J_1, \dots, J_{k-1}.$$

$$3. \mathbf{v}_1 = \bar{\mathbf{R}}(I_k, :) / \bar{\mathbf{R}}(I_k, J_k).$$

4. Обновить (J_k) столбец матрицы ошибки

$$\bar{\mathbf{R}}(:, J_k) = \mathbf{S}(:, J_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{u}_i)_{I_k} \mathbf{v}_i.$$

$$5. \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{R}}(:, J_k).$$

$$6. \|\bar{\mathbf{S}}^{(k)}\|^2 = \|\bar{\mathbf{S}}^{(k-1)}\|^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} |\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_k| \cdot |\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_k| + \|\mathbf{u}_k\|^2 + \|\mathbf{v}_k\|^2.$$

7. Проверить сходимость: если $\|\mathbf{u}_k\| \|\mathbf{v}_k\| \leq \varepsilon \|\bar{\mathbf{S}}^{(k)}\| = Tol$, то

закончить итерацию.

8. Найти индекс следующей строки:

$$I_{k+1} : \bar{\mathbf{R}}(I_{k+1}, J_k) = \max_i \bar{\mathbf{R}}(i, J_k), \quad i \neq I_1, \dots, I_k.$$

Конец алгоритма

В работе использован программный продукт ACA solver, схема которого показана на рисунке [5].

В таблице 1 приведены вычислительные затраты на формирование матрицы \mathbf{Z} методом моментов с использованием ACA solver и без него. В качестве тестовых структур взяты квадратная пластина со сторонами размером 1 м и сфера с радиусом 0,5 м. Вычислительный эксперимент выполнен при изменении количества треугольников, на которые разбивается структура (N). При вычислениях использовалась точность $Tol = 10^{-3}$. Из результатов видно, что применение ACA позволяет снижать вычислительные затраты. Однако при малом количестве тре-

угольников использование алгоритма не уменьшает затраты времени.

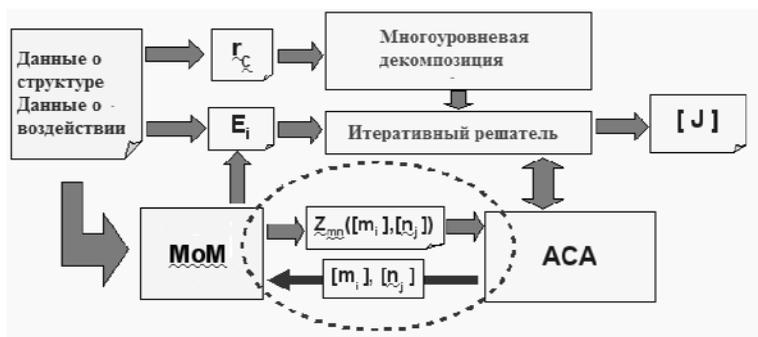


Схема ACA solver

Таблица 1
Вычислительные затраты на формирование матрицы Z

| Структура | Использование ACA | N | Время, с | Затраты памяти, Мбайт |
|------------------------|-------------------|------|----------|-----------------------|
| Прямоугольная пластина | нет | 422 | 0,37 | 25,12 |
| | есть | | 0,84 | 9,83 |
| | нет | 993 | 1,93 | 114,89 |
| | есть | | 1,81 | 24,41 |
| | нет | 1860 | 9,83 | 431,86 |
| | есть | | 4,12 | 60,39 |
| Сфера | нет | 558 | 0,63 | 42,45 |
| | есть | | 2,13 | 20,37 |
| | нет | 1000 | 3,44 | 144,00 |
| | есть | | 3,34 | 43,99 |
| | нет | 2012 | 11,95 | 553,71 |
| | есть | | 5,74 | 124,00 |

Далее выполнена оценка влияния параметра Tol на точность результатов. Для тестирования выбраны тестовые фигуры: куб со сторонами $0,3 \times 0,3$ м и сфера радиусом 0,5 м. В качестве контролируемой величины использована максимальная плотность тока на поверхности структуры. Полученные результаты приведены в таблице 2. Из таблицы 2 видно, что сходимость

решения с АСА и без него для обеих структур наблюдается при $Tol = 10^{-3}$.

Таблица 2
Результаты использования алгоритма АСА

| Структура | Использование АСА | Время решения, с | Затраченная память, Мбайт | Макс. плотность тока, А/м | |
|-----------------|-------------------|------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------|
| Куб | нет | 127,0 | 324,00 | 3,66 | |
| | Есть | $Tol = 1$ | 64,4 | 52,62 | 3,80 |
| | | $Tol = 10^{-1}$ | 65,0 | 63,47 | 3,67 |
| | | $Tol = 10^{-2}$ | 66,2 | 67,60 | 3,65 |
| | | $Tol = 10^{-3}$ | 75,7 | 82,76 | 3,66 |
| $Tol = 10^{-4}$ | 86,9 | 101,00 | 3,66 | | |
| Сфера | нет | 14,3 | 81,00 | $5,12 \cdot 10^{-3}$ | |
| | Есть | $Tol = 1$ | 1,5 | 16,80 | $4,80 \cdot 10^{-3}$ |
| | | $Tol = 10^{-1}$ | 5,0 | 30,70 | $4,90 \cdot 10^{-3}$ |
| | | $Tol = 10^{-2}$ | 5,6 | 31,53 | $5,10 \cdot 10^{-3}$ |
| | | $Tol = 10^{-3}$ | 5,9 | 33,70 | $5,10 \cdot 10^{-3}$ |
| $Tol = 10^{-4}$ | 7,4 | 38,20 | $5,10 \cdot 10^{-3}$ | | |

Таким образом, исследование применения адаптивной перекрестной аппроксимации для уменьшения вычислительных затрат на решение электромагнитных задач показало его перспективность. Получено уменьшение затрат времени до 3 раз, а памяти до 6 раз.

*Работа выполнена за счет проекта 8.9562.2017/8.9
Минобрнауки Российской Федерации*

ЛИТЕРАТУРА

1. Harrington R.F. Field Computation by Moment Methods. New York, The MacMillian Co., 1968 ; reprinted by Krieger Publishing Co., Malabar, Fl., 1982.
2. Bebendorf M. Approximation of boundary element matrices. 2000. Numer. Math. 86. P. 565–589.
3. Kezhong Zhao, Marinos N. Vouvakis, Jin-Fa Lee. The Adaptive Cross Approximation Algorithm for Accelerated Method of Moments Computations of EMC Problems // IEEE Transactions on electromagnetic compatibility. 2005. 47 p.

4. Лесков А.Н. Разработка алгоритмов анализа рассеяния и излучения электромагнитных волн металлическими поверхностями произвольной формы : дис. ... на соискание степени магистра. Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2017. 63 с.

5. Описание работы ACA solver // Сайт компании политехнического университета Каталонии. URL: <http://www.tsc.upc.edu>.

M.V. Ryzhova, S.P. Kuksenko

Use of adaptive cross approximation for solving electromagnetic tasks by the method of moments

The use of adaptive cross approximation in order to reduce the computational resources when solving the problem of electromagnetic waves scattering by conductive structures by the method of moments is considered. The example of test problems solution due to data compression shows a significant reduction in computation time up to 3 times and the amount up to 6 times of required memory at controlled accuracy.

mariya_rijova@mail.ru