УДК 519.246.2

Ф.Ф. Идрисов, А.А. Квасников

Рандомизированные модели трендов деградации радиоэлектронных систем в условиях противодействия

Излагаются модели и алгоритмы выделения трендов при оценивании деградации радиоэлектронных систем в условиях природных и преднамеренных воздействий. Предполагается рандомизированный характер таких воздействий, т.е. поток моментов воздействий представляет собой пуассоновский процесс, наблюдаемый в случайные моменты времени.

Ключевые слова: внешние воздействия, радиоэлектронные системы, рандомизированные наблюдения, пуассоновский процесс, тренд, статистические оценки.

Соблюдение и защита национальных интересов являются сферой особого внимания любого государства и России в том числе. В рамках широкого спектра возможных мероприятий, позволяющих ей всегда «держать свой порох сухим», особо необходимо отметить возросшие требования по обеспечению надежной работы радиоэлектронных систем (РЭС) и в первую очередь в условиях боевых столкновений (например, в рамках локальной гибридной войны). Очень важной частью данной проблемы является разработка моделей и алгоритмов, обеспечивающих выделение трендов наиболее критичных параметров, определяющих боеспособность РЭС на должном уровне (особенно в условиях мощного преднамеренного электромагнитного противодействия).

Как показывает практика, традиционный подход к разработке РЭС не всегда позволяет достичь требуемых результатов (например, в случае самолетов технологии «СТЕЛС», массированных атак тяжелых беспилотников и других средств современной боевой техники). В этой связи очень актуальным является тщательный анализ принимаемых допущений обо всех процессах, обеспечивающих готовность РЭС к выполнению своих задач.

В данной работе в качестве одного из важнейших факторов устойчивой работы РЭС рассматривается деградация, наступающая в результате естественного старения либо интенсивного износа в процессе эксплуатации в сложных климатических условиях (например, в пустынях Ближнего Востока или в условиях Арктики), а также внешних преднамеренных импульсных воздействий ударного типа.

Предполагаемая по умолчанию эквидистантность наблюдений может в значительной степени искажать возможности моделей, используемых для синтеза и анализа РЭС. Фактически РЭС работают со случайными процессами, наблюдаемыми в случайные моменты времени, когда даже число одномоментных наблюдений может быть случайным. Такие процессы предлагается в работе [1] назвать рандомизированными. Их изучению посвящен целый ряд работ. Назовем лишь некоторые из них: [2–4].

Следуя изложенным в работе [1] идеям, построим модели и алгоритмы оценивания трендов для подобных ситуаций.

Базовые элементы исследуемых моделей

Моделирование процессов деградации РЭС на практике затрудняется рандомизированностью моментов наблюдений. В этом случае наиболее часто используемый метод наименьших квадратов для схожих задач требует существенной модификации. Для этого в данной работе используются специально сконструированные статистики. Это позволяет синтезировать модели более высокого порядка с меньшей чувствительностью к ошибкам в поступающих данных.

Для нашей задачи используются статистики различного вида, такие как

$$\sum_{i=1}^{N} f(t_i), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(t_i, t_j), \tag{2}$$

$$\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N} f(t_i) \tag{3}$$

и т.д. либо их линейные комбинации.

Здесь f – некоторая наблюдаемая функция, t_i – моменты наблюдения, T – интервал наблюдения, λ – интенсивность наблюдений, N – количество наблюдений.

В работе подробно исследуются свойства таких статистик, т.е. доказываются теоремы, устанавливающие достаточные условия сходимости статистик в среднеквадратичном смысле и почти наверное, а также их асимптотической нормальности при $\lambda \to \infty$, когда t_i образуют пуассоновский поток событий с некоторой интенсивностью. При этом основные усилия нацелены на получение оценок параметров трендов деградации РЭС вида

$$x_i = x(t_i) = \sum_{k=1}^{S} \theta_k \varphi_k(t_i) + n_i, \tag{4}$$

где моменты измерений t_i представляют собой пуассоновский поток событий, θ_k – неизвестные параметры тренда, $\varphi_k(t_i)$ – известные функции времени, n_i – случайные составляющие, S – порядок модели тренда.

Конструирование трендовых моделей деградации РЭС при рандомизированных наблюдениях

А. Общее решение

При построении оценок $\hat{\theta}_k$ неизвестных параметров θ_k тренда деградации РЭС (4) возьмем метод наименьших квадратов [5]

$$R=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\sum_{k=1}^{S}\hat{\theta}_k\varphi_k(t_i))^2\Rightarrow\min_{\hat{\theta}_k},$$

здесь N – число наблюдений на интервале времени $[0, T]$. Приравняв нулю производную от R по $\hat{\theta}_l$, получим систему уравнений, определяющую оценку $\hat{\theta}_k$ параметров θ_k. Запишем ее в векторно-матричном виде

$$(\varphi^T,\varphi)\hat{\vec{\theta}}=\varphi^T\vec{x}, \tag{5}$$

откуда нетрудно получить явное выражение для искомых оценок $\hat{\vec{\theta}}$:

$$\hat{\vec{\theta}}=(\varphi^T,\varphi)^{(-1)}\varphi^T\vec{x}. \tag{6}$$

Рассмотрим вкратце свойства этих оценок. Для этого из соображений удобства запишем выражение (4) в компактной форме

$$\vec{x}=\varphi\vec{\theta}+\vec{n}. \tag{7}$$

Но поскольку

$$M\{\vec{x}\,|\,\{t_i\}\}=\varphi\vec{\theta},$$

то

$$M\{\hat{\vec{\theta}}\,|\,\{t_i\}\}=(\varphi^T\varphi)^{(-1)}(\varphi^T\varphi)\vec{\theta}=\vec{\theta},$$

т.е. оценки $\hat{\vec{\theta}}$ являются несмещенными независимо от моментов наблюдений $\{t_i\}$ за состоянием РЭС. Здесь M и T – обозначения операций усреднения и транспонирования соответственно.

Выведем формулу матрицы ковариаций искомых оценок как меру их точности.

Поскольку

$$\hat{\vec{\theta}}-\vec{\theta}=(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T\vec{x}-(\varphi^T\varphi)^{(-1)}(\varphi^T\varphi)\vec{\theta}=$$
$$=(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T(\vec{x}-\varphi\vec{\theta})=(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T\vec{n},$$

то матрица ковариаций $\mathbf{V}$ оценок $\hat{\vec{\theta}}$ запишется в виде

$$\mathbf{V}=M\left\{(\hat{\vec{\theta}}-\vec{\theta})\times(\hat{\vec{\theta}}-\vec{\theta})^T\right\}=$$
$$=(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T M\left\{\vec{n}\vec{n}^T\right\}\varphi(\varphi^T\varphi)^{-1}.$$

В силу сделанных выше допущений $M\left\{\vec{n}\vec{n}^T\right\}=\sigma^2\mathbf{E}_N$, $\mathbf{E}_N$ – единичная матрица $N\times N$. Тогда

$$\mathbf{V}=\sigma^2(\varphi^T\varphi)^{(-1)}. \tag{8}$$

Но воспользоваться соотношением (8) на практике не получится, поскольку, как правило, величина σ^2 неизвестна. Построим ее оценку, используя минимальное значение квадратичной формы R:

$$R_{\min}=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\sum_{k=1}^{S}\hat{\theta}_k\varphi_k(t_i))^2=(\vec{x}-\varphi\hat{\vec{\theta}})(x-\varphi\hat{\vec{\theta}}). \tag{9}$$

Найдем $M\{R_{\min}\,|\,\{t_i\}\}$. Для этого, используя вместо $\hat{\vec{\theta}}$ их явное выражение, нетрудно получить

$$\vec{x}-\varphi\hat{\vec{\theta}}=\varphi\vec{\theta}+n-\varphi(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T(\varphi\vec{\theta}+\vec{n})=$$
$$=(\mathbf{E}_N-\varphi(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T)\vec{n}.$$

Поэтому

$$R_{\min}=\vec{n}^T(\mathbf{E}_N-\varphi(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T)^2\vec{n}.$$

Тогда

$$(\mathbf{E}_N-\varphi(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T)^2=\mathbf{E}_N-\varphi(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T.$$

И поскольку $M\{n_i n_j\}=\sigma^2\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, то

$$M\{R_{\min}\,|\,\{t_i\}\}=\sigma^2 Sp(\mathbf{E}_N-\varphi(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T)^2.$$

Здесь $Sp(\mathbf{E}_N)=N$ и $Sp(\varphi(\varphi^T\varphi)^{(-1)}\varphi^T)=$ $=Sp((\varphi^T\varphi)^{(-1)}(\varphi^T\varphi))=Sp(\mathbf{E}_s)=s$, так что

$$M\{R_{\min}\}=\sigma^2(N-s). \tag{10}$$

В итоге получаем несмещенную оценку $\hat{\sigma}^2$ величины σ^2 и оценку $\hat{V}$ матрицы вариаций $\mathbf{V}$:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{R_{\min}}{N-s},\ \hat{V}=\frac{R_{\min}}{N-s}(\varphi^T\varphi)^{(-1)}. \tag{11}$$

Полученная оценка $\hat{V}$ позволяет строить доверительные интервалы для параметров деградации РЭС при гауссовских помехах n_i.

B. Аппроксимация общего решения

Для получения хороших оценок в условиях рандомизированных наблюдений процессов деградации РЭС требуются выборки достаточно большого объема (как показали результаты имитационного моделирования, порядка 100 и выше). Однако при этом начинают сказываться ошибки округления, особенно при обращении матрицы $(\varphi^T\varphi)$ при $s\geq 3$. В этой связи предлагается аппроксимация изложенного выше метода наименьших квадратов при оценке параметров $\vec{\theta}$, не требующая обращения матрицы $(\varphi^T\varphi)$.

Элементы матрицы $(\varphi^T\varphi)$ имеют вид

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(t_i)\varphi_l(t_i). \tag{12}$$

Введем обозначение

$$\varphi_{kl}=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi_k(u)\varphi_l(u)du.$$

Тогда, представляя выражение (12) в виде

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(t_i)\varphi_l(t_i)=\lambda T\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(t_i)\varphi_l(t_i),$$

в силу сходимости почти наверное, последний сомножитель заменим на φ_{kl}. Тогда при достаточно больших объемах наблюдений за состоянием РЭС можно приближенно считать, что

$$(\varphi^T\varphi) = \lambda T \times \Phi, \Phi = \|\varphi_{kl}\|,$$

$$(\varphi^T\varphi)^{(-1)} = \frac{1}{\lambda T}\Phi^{(-1)},$$

и оценки параметров тренда деградации РЭС $\hat{\vec{\theta}}$ примут вид

$$\hat{\vec{\theta}} = \Phi^{(-1)}\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\vec{x}).$$

Заметим, что $\Phi^{(-1)}$ – матрица Гильберта, элементы которой очень быстро убывают с увеличением *s*, и это приводит к неустойчивости процедуры оценивания параметров тренда деградации РЭС, зато ее использование позволяет нам снять проблему обращения матрицы $(\varphi^T\varphi)$.

С. Свойства аппроксимирующего решения

Для определенности будем считать поток моментов наблюдений за состоянием РЭС пуассоновским с постоянной интенсивностью λ.

Поскольку $\vec{x} = \phi\vec{\theta} + \vec{n}$, то

$$M\{\frac{1}{\lambda T}\varphi^T\vec{x} \mid \{t_i\}\} = \frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\varphi)\vec{\theta},$$

тогда

$$M\{\hat{\vec{\theta}} \mid \{t_i\}\} = \Phi^{(-1)}\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\varphi)\vec{\theta}.$$

Здесь очень важно отметить, что в полученных оценках несмещенность исчезает при любых наборах моментов наблюдений за состоянием РЭС $\{t_i\}$. Но это свойство сохраняется лишь в среднем, после усреднения по моментам наблюдения $\{t_i\}$

$$M\{\hat{\vec{\theta}}\} = \Phi^{(-1)}M\{\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\varphi)\}\vec{\theta} = \Phi^{(-1)}\Phi\vec{\theta} = \vec{\theta}.$$

Замена $(\varphi^T\varphi)^{(-1)}$ на $\Phi^{(-1)}$ ведет к возрастанию дисперсии оценок $\hat{\vec{\theta}}$. Поэтому выведем их матрицу ковариаций.

Прежде всего запишем

$$M\{\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(t_i)x_i\} = M\{\frac{1}{\lambda T}\sum_{r=1}^{S}\theta_r\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(t_i)\varphi_r(t_i) +$$

$$+\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(t_i)n_i\} = \frac{1}{\lambda T}\sum_{r=1}^{S}\theta_r \times \lambda\int_0^T\varphi_k(u)\varphi_r(u)du = \sum_{r=1}^{S}\varphi_{kr}\theta_r,$$

так что математическое ожидание вектора $[\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(t_i)x_i]$ равно $\Phi\vec{\theta}$. Отсюда

$$\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta} = \Phi^{(-1)}[\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\vec{x}) - \Phi\vec{\theta}]$$

и

$$V = M\{(\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta})(\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta})^T\} =$$

$$= \Phi^{(-1)}M\{[\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\vec{x} - \Phi\theta)] \times [\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\vec{x}) - \Phi\vec{\theta}]^T\}\Phi^{(-1)}.$$

Но поскольку $\vec{x} = \varphi\vec{\theta} + \vec{n}$, то

$$\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\vec{x}) - \Phi\vec{\theta} = \frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\varphi)\vec{\theta} + \frac{1}{\lambda T}\varphi^T\vec{n} - \Phi\vec{\theta} =$$

$$= (\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\varphi) - \Phi)\vec{\theta} + \frac{1}{\lambda T}\varphi^T\vec{n}.$$

Отсюда

$$M\{[\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\vec{x}) - \Phi\vec{\theta}] \times [\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\vec{x}) - \Phi\vec{\theta}]^T\} =$$

$$= M\{[(\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\varphi) - \Phi)\vec{\theta} + \frac{1}{\lambda T}\varphi^T\vec{n}] \times$$

$$\times[(\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\varphi) - \Phi)\vec{\theta} + \frac{1}{\lambda T}\varphi^T\vec{n}]^T\}. \quad (13)$$

Усредняя по $\vec{n}$ с учетом того, что $M\{\vec{n}\} = 0$ и $M\{\vec{n}\vec{n}^T\} = \sigma^2 \times \mathbf{E}_N$, для фиксированных $\{t_i\}$ запишем правую часть (13) в виде

$$\frac{\sigma^2}{(\lambda T)^2}M\{\varphi^T\varphi\} + M\{(\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\varphi) - \Phi)\vec{\theta}\vec{\theta}^T(\frac{1}{\lambda T}(\varphi^T\varphi) - \Phi)\}, \quad (14)$$

где осталось усреднение лишь по $\{t_i\}$.

Но $M\{(\varphi^T\varphi)\} = \lambda T \times \Phi$, и поэтому первое слагаемое в выражении (14) равно $\sigma^2\Phi / \lambda T$. Усредняя второе слагаемое в нем, получим матрицу с элементами

$$(\frac{1}{\lambda T}\sum_{r=1}^{S}\theta_r\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(t_i)\varphi_r(t_i) - \sum_{r=1}^{S}\theta_r\varphi_{kr}) \times$$

$$\times(\frac{1}{\lambda T}\sum_{p=1}^{S}\theta_p\sum_{j=1}^{N}\varphi_l(t_i)\varphi_p(t_j) - \sum_{p=1}^{S}\theta_p\varphi_{lp}). \quad (15)$$

Усреднение выражения (15) по моментам наблюдений $\{t_i\}$ дает

$$\frac{1}{(\lambda T)^2}\sum_{r=1}^{S}\sum_{p=1}^{S}\theta_r\theta_p M\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\varphi_k(t_i)\varphi_r(t_i)\varphi_l(t_j)\varphi_p(t_j)\} -$$

$$-\sum_{r=1}^{S}\sum_{p=1}^{S}\theta_r\theta_p\varphi_{kr}\varphi_{lp}.$$

И поскольку

$$M\{\frac{1}{(\lambda T)^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\varphi_k(t_i)\varphi_r(t_i)\varphi_l(t_j)\varphi_p(t_j)\} = \varphi_{kr}\varphi_{lp} + \frac{1}{\lambda T}\varphi_{krlp},$$

где

$$\varphi_{krlp} = \frac{1}{T}\int_0^T\varphi_k(u)\varphi_r(u)\varphi_l(u)\varphi_p(u)du,$$

то математическое ожидание (15) равно

$$\frac{1}{\lambda T}\sum_{r,p=1}^{S}\theta_r\theta_p\varphi_{krlp}.$$

Объединяя всё вместе, получим окончательно матрицу ковариации оценок параметра тренда $\hat{\vec{\theta}}$:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\lambda T}\Phi^{(-1)}\left[\sigma^2\Phi + \left\|\sum_{r,p=1}^{S}\theta_r\theta_p\varphi_{krlp}\right\|\right]\Phi^{(-1)}. \quad (16)$$

Здесь второе дополнительное слагаемое дает добавочную дисперсию оценок, возникшую из-за замены матрицы $(\varphi^T\varphi)^{(-1)}$ на $\Phi^{(-1)}$.

Однако заметим, что при $\lambda^T \to \infty$ и $\mathbf{V} \to 0$, так что получаемые оценки параметров тренда деградации РЭС сходятся в среднеквадратичном смысле к их истинным значениям $\vec{\theta}$. Относительное увеличение дисперсии оценок по сравнению с МНК определяется матрицей с элементами

$$\frac{1}{\sigma^2}\left\|\sum_{r,p=1}^{S}\theta_r\theta_p\varphi_{krlp}\right\|.$$

Оно, естественно, зависит от самих значений параметров θ и функции $\varphi_k(t)$.

В качестве оценки $\hat{V}$ матрицы ковариаций предлагается использовать матрицу

$$\hat{V} = \frac{1}{\lambda T}\Phi^{(-1)}\hat{R}\Phi^{(-1)} = \frac{1}{(\lambda T)^2}\Phi^{(-1)}\left\|\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(t_i)\varphi_l(t_i)x_i^2\right\|\Phi^{(-1)}. \quad (17)$$

Для этого доказан ряд теорем, показывающих сходимость оценок (17) к величине **V** (доказательства теорем в силу громоздкости не приводятся). Также доказана асимптотическая нормальность получаемых оценок. Другими словами, выражение (17) позволяет строить доверительные интервалы при $\lambda T \gg 1$.

На основе представленных математических моделей и алгоритмов было разработано программное обеспечение, написанное на языке C++ и использующее возможности современной платформы Qt [6].

Программное обеспечение

Выбор языка программирования обусловлен его кроссплатформенностью, высокой вычислительной производительностью и возможностью поддержки механизмов эффективного управления памятью и параллельных вычислений на многопроцессорных системах. Функциональные возможности, предоставляемые классами платформы Qt, позволили сократить временные затраты на разработку основной структуры программы и механизма взаимодействия с пользователем.

Математический аппарат программного обеспечения основан на применении алгоритма выделения тренда временных рядов. Так, входные данные в программе задаются с ввода пар значений $\{t_i, x_i\}$, где t_i – моменты измерений, а x_i – сами измеренные значения. В ходе работы программа предоставляет пользователю выходную информацию в виде окон с результатами: таблица значений тренда, таблица коэффициентов полинома и график.

Стоит отметить, что разработанное приложение является начальной версией, вполне пригодной в образовательном процессе. В дальнейшем предполагается расширение спектра решаемых прикладных задач с соответствующим математическим аппаратом и программным обеспечением.

Заключение

Итак, в данной работе детально исследуются возможности выделения трендов рандомизированных процессов при решении очень важной прикладной проблемы оценивания деградации радиоэлектронных систем в экстремальных условиях внешней среды либо в условиях возможного противодействия противника. Для этих целей разработан пакет программ, позволяющий в имитационном режиме исследовать применимость предлагаемых моделей.

Литература

1. Идрисов Ф.Ф. Рандомизированные временные ряды. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2016. – 341 с.

2. Гнеденко Б.В. Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений // Тр. Тбилисского мат. ин-та АН ГССР. – 1989. – Т. 92. – С. 146–150.

3. Тривоженко Б.Е. Выделение трендов временных рядов и потоков событий. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. – 285 с.

4. Snyder D.L. Random point processes. – N.Y.: Willey, 1975. – 485 p.

5. Кендал М.Дж. Статистические выводы и связи / М.Дж. Кендал, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1973. – 899 с.

6. Сайт инструментария Qt [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.qt.io/, свободный (дата обращения: 16.08.2020).

Идрисов Фарит Фатыхович
Д-р техн. наук, профессор каф. телевидения и управления (ТУ) Томского гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники (ТУСУР)
пр. Ленина, д. 40, г. Томск, Россия, 634050
Тел.: +7-906-199-11-95
Эл. почта: farit.idrisov@mail.ru

Квасников Алексей Андреевич
Аспирант каф. ТУ ТУСУРа
пр. Ленина, д. 40, г. Томск, Россия, 634050
ORCID: (0000-0001-7000-956X)
Тел.: +7-923-433-34-41
Эл. почта: aleksejkvasnikov@gmail.com