

Р.С. СУРОВЦЕВ, канд. техн. наук, доцент каф. ТУ,
ТУСУР, Томск

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕСУРСА
НЕПОЛНОГО ИЗМЕНЕНИЯ МАТРИЦЫ СЛАУ
ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ РЯДА ЕМКОСТНЫХ МАТРИЦ
МЕТОДОМ МОМЕНТОВ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ
ОЦЕНКИ УСКОРЕНИЯ**

Рассмотрено многократное решение СЛАУ блочным LU-разложением при вычислении ряда емкостных матриц методом моментов. Выполнены сравнительные аналитические оценки ускорения двумя алгоритмами, основанными на блочном LU-разложении и учитывающими специфику неполного изменения матрицы СЛАУ.

В настоящее время широкое распространение получило имитационное моделирование различных процессов в самых разнообразных областях научной и практической деятельности. В его основе лежат численные методы, часть из которых сводит исходную задачу моделирования к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Необходимость многовариантного анализа или оптимизации в диапазоне параметров требует решения m СЛАУ и больших вычислительных затрат (пропорциональных mN^3 для метода Гаусса, где N – порядок матриц). Поэтому нужно выявлять и использовать ресурсы ускорения. Часто на практике возникают задачи, когда изменение некоторого параметра исходной системы приводит к изменению не всех, а части элементов матрицы СЛАУ. Примером является задача вычисления матрицы погонных коэффициентов электростатической индукции (далее емкостной матрицы C) системы проводников и диэлектриков (рисунок 1,а) методом моментов [1]. Границы системы разбиваются на подобласти «проводник – диэлектрик» (всего N_C) и «диэлектрик – диэлектрик» (N_D), а на основе их параметров заполняется матрица ($N=N_C+N_D$). К частичному изменению матрицы СЛАУ приводит изменение двух параметров системы: относительной диэлектрической проницаемости ε_r и толщины слоя между проводниками h_C . Первый

влияет на элементы на главной диагонали матрицы с индексами больше N_C (рисунок 1,б), а второй – на строки и столбцы в нижней и правой ее частях (рисунок 1,в).

Для учета специфики неполного изменения матрицы СЛАУ представляет интерес блочная версия LU-разложения. Метод является обобщением традиционной версии LU-разложения, где векторные операции заменены матричными, что позволяет для данного случая разбить матрицу на 4 блока. Таким образом, в условиях поставленной задачи нет необходимости в полном LU-разложении для каждого m , а достаточно пересчитывать только блоки с изменившимися частями. Детальное описание усовершенствованных алгоритмов вычисления m емкостных матриц с учетом специфики изменения матрицы для рисунка 1,б (алгоритм 1) представлено в [2], а для рисунка 1,в (алгоритм 2) – в [3]. Для каждого алгоритма получены выражения, оценивающие его трудоемкость и ускорение. Алгоритмы апробированы на практических задачах [4–6]. Несмотря на большой объем проведенных исследований, не выполнено детальных оценок и сравнения ускорения (относительно полного LU-разложения) этих алгоритмов.

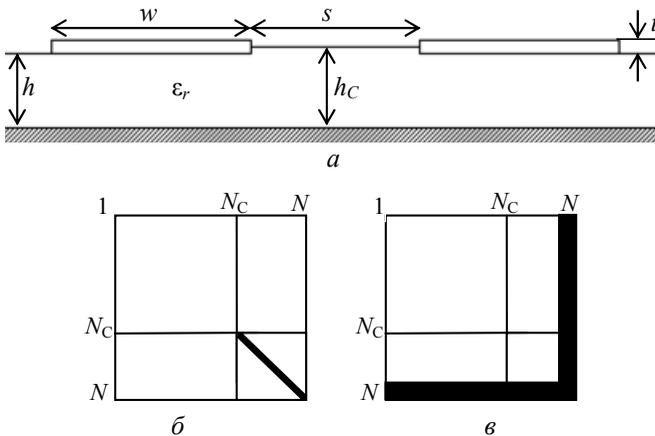


Рисунок 1 – Поперечное сечение связанной микрополосковой линии (а) и вид матрицы СЛАУ при изменении ϵ_r (б) и h_C (в)

Цель работы – оценка и сравнение алгоритмов, учитывающих специфику неполного изменения матрицы СЛАУ, на осно-

ве аналитических оценок ускорения вычисления m емкостных матриц.

Оценено влияние N на ускорение β при $m = 1, 2, \dots, 10$ для $N_C/N = 0,5; 0,6; \dots, 0,9; 0,99; 0,999$ (рисунок 2). В результате выявлено, что для $N = 1000$ – 10000 зависимости мало отличаются, поэтому приведены оценки только для $N = 1000$.

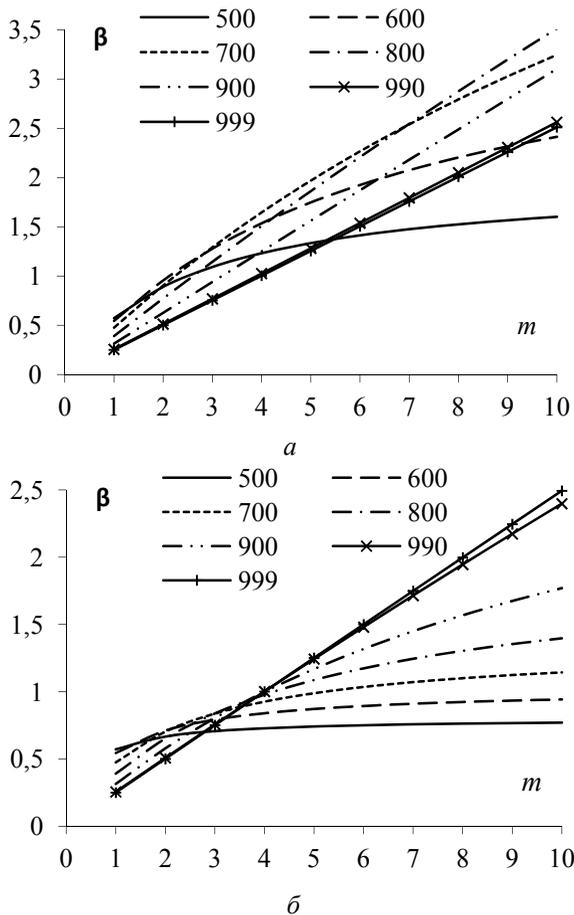


Рисунок 2 – Зависимости β от m для разных N_C при $N=1000$: а – алгоритм 1; б – алгоритм 2

Прежде всего отметим, что для каждого алгоритма ускорение получено не для всех m и N_C . Например, ускорение алгоритмом 1 ($\beta > 1$) для $N_C = 500\text{--}800$ достигается при $m > 3$, а для $N_C = 900\text{--}999$ – при $m > 4$. Вероятной причиной этого является операция обращения блока большого порядка, которая существенно влияет на общее время и ускорение при малых m . Операция обращения влияет и на характер кривых: сначала при $N_C < 800$ кривые близки к ветви параболы, а после становятся линейными и более пологими, что говорит об уменьшении ускорения. Например, значение β в точке $m = 10$ при увеличении N_C от 800 до 999 снижается с 3,5 до 2,5. Для алгоритма 2 эта зависимость более сложная: ускорение начинается с $m = 4$ для $N_C = 999, 990, 900$ и сохраняется даже при уменьшении N_C до 700, хотя уже не растет с увеличением m .

Далее оценено влияние числа проводников N_{COND} при $m = 100, 200, \dots, 1000, 10000$ на предельное ускорение при $N = 1000$ и $N_C = 900, 990, 999$ (таблицы 1, 2).

Для алгоритма 1 наблюдается существенный рост β при $N_{\text{COND}}=1$ с увеличением m , при этом рост β для $N_C = 990$ и 999 является линейным и значение β составляет около 100 раз, а при $N_C = 900$ – 7,86 раза. При $N_{\text{COND}} = 100$ ускорение и его рост снижаются, при этом для $N_C = 900$ оно слабо зависит от m (при росте m от 100 до 10000 ускорение возрастает в 2 раза). Результаты алгоритма 2 неоднозначны. Так, при $N_C = 900$ ускорение практически не зависит от m , например для $N_{\text{COND}} = 1$ составляет около 3,5 раза, а для $N_{\text{COND}} = 100$ – 3,75 раза. Отмечается слабая зависимость ускорения от N_{COND} и для остальных N_C : ускорение при $N_{\text{COND}} = 100$ в 1,075–1,196 раза больше ускорения при $N_{\text{COND}} = 1$. Таким образом, алгоритм 1 эффективнее алгоритма 2 для многократных вычислений. Это объясняется тем, что при реализации алгоритма 2 пересчитываются сразу три блока матрицы СЛАУ, а при использовании алгоритма 1 – только один блок. При этом алгоритм 2 является обобщением алгоритма 1.

Отметим, что описанный способ позволяет выполнить быструю и априорную оценку эффективности использования того или иного алгоритма. Эта оценка принципиально важна, поскольку помогает выявлять, при достижении каких значений параметров СЛАУ начинается ускорение и какие из них оказывают на него наибольшее влияние.

Таблица 1

Аналитические оценки ускорения решения СЛАУ
за счет алгоритма 1

N_{COND}	m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	10000
1	$N_C=900$	27,73	49,59	67,27	81,85	94,10	104,52	113,50	121,32	128,19	134,27	218,06
	$N_C=990$	25,60	51,16	76,67	102,14	127,56	152,94	178,28	203,57	228,82	254,03	2358,5
	$N_C=999$	25,11	50,21	75,31	100,40	125,49	150,58	175,66	200,74	225,82	250,89	2492,0
100	$N_C=900$	18,96	25,34	28,55	30,48	31,76	32,68	33,37	33,91	34,34	34,69	37,83
	$N_C=990$	28,83	54,06	76,31	96,09	113,79	129,72	144,13	157,23	169,20	180,16	379,21
	$N_C=999$	30,08	59,75	89,01	117,88	146,35	174,44	202,15	229,50	256,49	283,12	1782,0

Таблица 2

Аналитические оценки ускорения решения СЛАУ
за счет алгоритма 2

N_{COND}	m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	10000
1	$N_C=900$	3,30	3,47	3,53	3,56	3,58	3,59	3,60	3,60	3,61	3,61	3,65
	$N_C=990$	14,62	20,39	23,48	25,40	26,72	27,67	28,40	28,97	29,42	29,80	33,26
	$N_C=999$	23,37	43,68	61,50	77,25	91,29	103,87	115,21	125,48	134,83	143,38	294,75
100	$N_C=900$	3,58	3,75	3,81	3,84	3,85	3,87	3,87	3,88	3,89	3,89	3,92
	$N_C=990$	16,79	22,98	26,21	28,19	29,52	30,48	31,21	31,78	32,24	32,61	36,0
	$N_C=999$	27,97	51,92	72,66	90,80	106,79	120,99	133,70	145,12	155,46	164,85	322,85

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по проекту RFMEFI57417X0172.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gazizov T.R. Analytic expressions for Mom calculation of capacitance matrix of two dimensional system of conductors and dielectrics having arbitrary oriented boundaries // Proc. Of the IEEE EMC Symposium. Montreal, Canada, 2001. Vol. 1. P. 151–155.

2. Суровцев Р.С., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Аналитическая оценка вычислительных затрат на решение СЛАУ при многократном вычислении емкостной матрицы в диапазоне изменения диэлектрической проницаемости диэлектриков // Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т. 428. С. 196–207.

3. Суровцев Р.С., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Многократное вычисление емкостной матрицы системы проводников и диэлектриков с изменяющимися параметрами с помощью блочного LU-разложения при решении СЛАУ // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13, № 4. С. 375–383.

4. Суровцев Р.С., Куксенко С.П. Вычисление матрицы емкостей произвольной системы проводников и диэлектриков методом моментов: зависимость ускорения за счет блочного LU-разложения от порядка матрицы СЛАУ // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55, № 9/3. С. 126–130.

5. Суровцев Р.С., Салов В.К., Куксенко С.П. Использование блочного LU-разложения для ускорения вычисления временного отклика связанных линий передачи с учетом частотной зависимости диэлектрической проницаемости подложки // Инфокоммуникационные технологии. 2013. Т. 11, № 3. С. 64–69.

6. Суровцев Р.С., Куксенко С.П., Газизов Т.Р. Многократное решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью блочного LU-разложения для вычисления емкостной матрицы системы проводников и диэлектриков при изменении ее параметров // Доклады ТУСУР. 2015. № 3(37). С. 132–138.

R.S. Surovtsev

Usage of the incomplete linear algebraic equations matrix changing in computing of the set of capacitance matrix by the method of moments: analytic evaluation of the acceleration

A Multiple solution of linear algebraic equations by block LU-factorization in computing of the set of capacitance matrix by the

method of moments is considered. The comparative analytic estimates of the acceleration of two algorithms based on block LU-factorization and taking into account the specifics of incomplete linear algebraic equations matrix changing are performed.

surovtsevrs@gmail.com