

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Т.Р. Газизов

Уменьшение искажений
электрических сигналов
в межсоединениях

Томск 2003

УДК 621.372.2.052.3.018.78

ББК 32.88-019

Г 137

Т.Р. Газизов. Уменьшение искажений электрических сигналов в межсоединениях/ Под ред. Н.Д. Малютин. –Томск: Изд-во НТЛ, 2003.– 167 с.

ISBN

Рассмотрена проблема уменьшения искажений электрических сигналов в межконтактных электрических соединениях (межсоединениях) электронных схем. Представлены новые возможности для её решения: новые модели для вычисления методом моментов ёмкостных матриц двумерных и трёхмерных систем проводников и диэлектриков различной сложности, новые аналитические модели для вычисления временного отклика периодических структур межсоединений с ёмкостными нагрузками на стыках, новая помехозащищённая теплопроводная монтажная плата, многочисленные дополнительные возможности уменьшения искажений в межсоединениях с двухслойным диэлектриком.

Для разработчиков радиоэлектронной аппаратуры, студентов и аспирантов радиотехнических специальностей.

Рецензент д.т.н., проф. В.Н. Детинко, Сибирский физико-технический институт

УДК 621.372.2.052.3.018.78

ББК 32.88-019

ISBN

© Т.Р. Газизов



Моей любимой Саше...

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
ОТ РЕДАКТОРА	6
1. ПРОБЛЕМА УМЕНЬШЕНИЯ ИСКАЖЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В МЕЖСОЕДИНЕНИЯХ.....	8
1.1 Актуальность проблемы.....	8
1.2 Подходы к решению проблемы.....	10
1.2.1 Моделирование	11
1.2.2 Приложение результатов моделирования	15
2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ПАРАМЕТРОВ.....	16
2.1 Матрицы параметров.....	16
2.1.1 Виды матриц параметров отрезков МПЛП.....	16
2.1.2 Методы вычисления матриц параметров отрезков МПЛП.....	16
2.2 Выбор методов вычисления	24
2.3 Метод моментов	26
2.3.1 Теоретическая основа	27
2.3.2 Дискретизация границ.....	32
3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТКЛИКА.....	57
3.1 Обзор исследований	57
3.2 Аналитические модели для временного отклика	63
3.2.1 Структура из двух отрезков линии передачи с ёмкостной нагрузкой на стыке.....	63
3.2.2 Периодическая структура из N последовательно соединённых отрезков линии передачи с ёмкостными нагрузками на стыках.....	66
4. МЕЖСОЕДИНЕНИЯ МОНТАЖНЫХ ПЛАТ: ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	85
4.1 Основные виды монтажных плат.....	85
4.2 Помехозащищённая теплопроводная монтажная плата (ПТМП).....	86
4.3 Возможности ПТМП (качественные оценки).....	87
4.4 Макетирование межсоединений	90
4.5 Распространение импульсных сигналов в одиночных линиях	94
4.6 Перекрёстные помехи в парах связанных линий	94
5. ВОЗМОЖНОСТИ УМЕНЬШЕНИЯ ИСКАЖЕНИЙ СИГНАЛОВ В МЕЖСОЕДИНЕНИЯХ	97
5.1 Основные причины искажений сигналов в межсоединениях и способы их уменьшения	97
5.1.1 Основные причины искажений сигналов в межсоединениях	97
5.1.2 Способы уменьшения искажений сигналов в межсоединениях.....	98
5.2 Уменьшение искажений по результатам оценки параметров	101
5.2.1 Одиночные межсоединения	102
5.2.2 Связанные межсоединения.....	105
5.2.3 Многопроводные межсоединения	115
5.2.4 Основные результаты раздела	120
5.3 Уменьшение дальней перекрёстной помехи в межсоединениях с двухслойным диэлектриком.....	121
5.3.1 Допущения.....	122
5.3.2 Условия нулевой дальней перекрёстной помехи в структурах двух связанных линий... ..	123
5.3.3 Компенсация дальней перекрёстной помехи в последовательно соединённых отрезках межсоединений.....	124
5.3.4 Уменьшение дальних перекрёстных помех в отрезке многопроводной линии	147
5.3.5 Основные результаты раздела	154
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	156
ЛИТЕРАТУРА.....	156

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема уменьшения искажений электрических сигналов в межконтактных электрических соединениях (межсоединениях) становится подчас главной проблемой на пути дальнейшего совершенствования характеристик самой различной аппаратуры. Поэтому поиск новых возможностей для её решения весьма актуален и интенсивно ведётся исследователями всего мира.

Эта проблема оказалась столь широкой, что охватить весь спектр задач, связанных с её решением, в рамках одной работы не представляется возможным. Поэтому в данной монографии кратко представлены лишь новые возможности для её решения, найденные в ходе научных исследований автора.

В гл. 1 кратко рассмотрены суть и актуальность проблемы, а также подходы автора к её решению. В их основу положены теоретическое и экспериментальное моделирование, а также приложение результатов этого моделирования. В каждой последующей главе после краткого обзора соответствующей задачи и обоснования направления поиска её решений представлены результаты исследований автора, дающие новые возможности по решению этой задачи.

В гл. 2 рассмотрены матрицы параметров межсоединений. В ней представлены новые модели для вычисления методом моментов ёмкостных матриц двумерных и трёхмерных систем проводников и диэлектриков различной сложности, с подробным выводом аналитических формул для элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений.

В гл. 3 рассмотрено вычисление отклика. В ней представлены новые аналитические модели для вычисления временного отклика периодических структур межсоединений с ёмкостными нагрузками на стыках.

В гл. 4 рассмотрено экспериментальное моделирование межсоединений печатных плат. В ней представлена новая помехозащищённая теплопроводная монтажная плата и выполнена оценка её возможностей.

В гл. 5 результаты моделирования, полученные в предыдущих главах, применяются к поиску дополнительных возможностей уменьшения искажений в межсоединениях с двухслойным диэлектриком.

Представленные результаты выполнены автором в ходе пятнадцатилетней научной работы на кафедре телевидения и управления Томского университета систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР). Автор выражает большую признательность за помощь и поддержку в этой работе Н.И. Базенкову, В.И. Ковалёнку, И.Н. Пустынскому, Н.Д. Малютину, Н.А. Леонтьеву, а также фирме "СЭТ-системс". Автор благодарит ректорат ТУСУР за помощь в издании этой монографии.

Отзыв о книге можно прислать по E-mail: talgat@tu.tusur.ru

Декабрь 2003 года

Т.Р. Газизов

ОТ РЕДАКТОРА

Проблемы обеспечения электромагнитной совместимости многогранны и их решение имеет большое значение для проектирования современной радиоэлектронной аппаратуры. В зарубежной и отечественной литературе уделяется много внимания данной тематике, как с точки зрения решения общих вопросов, так и множества частных задач. Автор представляемой монографии хорошо известен в кругу специалистов благодаря участию в различных конференциях и опубликованным результатам исследований в периодической печати и в трудах конференций по проблеме уменьшения искажений в межсоединениях. Подошло время собрать все материалы и представить их в книге, построенной на системной основе. Суть системного подхода нашла отражение в последовательном описании проблемы, математических моделей и алгоритмов решения задачи уменьшения помех в проводниках печатных плат. Эти материалы распространяются на любые проводники, поэтому могут исследоваться пленочные структуры, выполненные по гибридной или интегральной технологии.

Представляемая монография имеет одну замечательную особенность: в ней представлено подробное решение задачи определения первичных параметров проводников печатных плат не только для двумерного, но и для трехмерного случая, с чем часто приходится сталкиваться разработчикам аппаратуры. Выбранный метод наиболее универсален и позволяет создать достаточно эффективные программные реализации для вычисления матриц емкостей и индуктивностей проводников без каких-либо серьезных ограничений на размеры и диэлектрическое заполнение. Развитие подхода автора может дать значительный эффект при использовании САПР, содержащей ядро вычисления первичных параметров не только при решении задач электромагнитной совместимости, но и при анализе функциональных элементов ВЧ, ОВЧ, СВЧ диапазонов, излучающих и приемных антенн.

Не менее значим раздел, в котором проведен анализ отклика межсоединений на импульсное воздействие. Здесь найдены оригинальные решения по уменьшению несанкционированного "проникновения" сигналов в соседние проводники. В основе этого анализа лежит глубокое понимание волновых процессов, наблюдаемых в связанных линиях.

Раздел, содержащий описание монтажных плат повышенной помехозащитности, дает возможность проектировщикам РЭС использовать на практике конструктивно-технологические решения, обеспечивающие хорошую электромагнитную совместимость.

Публикация представляемой книги подкреплена работами Т.Р. Газизова и его молодых коллег созданием программных продуктов, уже известных в кругу специалистов. Монография, разумеется, не может вместить все необходимое для практической работы, поэтому программы, к сожалению, остались вне ее рамок. Будем надеяться, что пакеты программ при деловом сотрудничестве с автором монографии окажутся доступными для пользователей.

Редактор книги выражает Т.Р. Газизову искреннюю признательность за эффективное участие в работах по расчету электрических параметров комбиниро-

ванных антенн, выразившееся предоставлением материалов данной книги и программ расчета.

Профессор, д.т.н.

Н.Д. Малютин

1. ПРОБЛЕМА УМЕНЬШЕНИЯ ИСКАЖЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В МЕЖСОЕДИНЕНИЯХ

В данном разделе кратко рассмотрены суть и актуальность проблемы, а также подходы автора к её решению.

1.1 Актуальность проблемы

С ростом быстродействия полупроводниковых приборов всё большая доля времени задержки распространения сигналов приходится на задержки в межсоединениях электронных схем, ставших существенным фактором, влияющим на быстродействие схемы в целом. Так, по данным Sematech [1], в скоростных полупроводниковых чипах задержки в межсоединениях составляют 80% цикла, тогда как задержки переключения транзисторных ключей занимают лишь 20% общего времени. В платах и блоках этот эффект проявляется ещё сильнее, поскольку их размеры больше, и длина межсоединений может составлять несколько длин волн распространяющихся по ним сигналов. С ростом электрической длины межсоединений их следует рассматривать как цепи с распределенными параметрами. Конечное время распространения электрических сигналов в таких межсоединениях вызывает искажения формы сигналов, причинами которых являются: отражения сигналов от различных (резистивных и комплексных, в том числе нелинейных) нагрузок и неоднородностей; потери в межсоединениях; частотная зависимость потерь и задержек в межсоединениях; разброс параметров межсоединений по длине.

Одним из основных способов уменьшения времени задержки сигналов в межсоединениях является уменьшение их длины за счет повышения плотности монтажа электронных схем. Однако при этом увеличиваются электромагнитные взаимовлияния между различными межсоединениями, что особенно характерно для плотных и разветвленных межсоединений цифровых схем. Поэтому межсоединения рассматривают как связанные линии передачи с распределенными параметрами или, в общем случае, как многопроводные линии передачи. Электрические сигналы, передаваемые по таким межсоединениям, подвергаются, кроме перечисленных выше, дополнительным амплитудным и фазовым искажениям (перекрестным помехам), вызванным электромагнитными наводками от соседних межсоединений, а также различием скоростей распространения многочисленных мод, возбуждаемых в многопроводных линиях передачи.

За последние десятилетия достижения в технологии производства интегральных схем позволили резко увеличить тактовые частоты чипов и систем [2]. Для схем на комплементарных структурах металл-оксид-полупроводник (КМОП), тактовые частоты на уровне чипов возросли с 2–5 МГц в начале 80-х до диапазона 50–100 МГц в 1992 году. Тактовые частоты кремниевой эмиттерно-связанной логики (ЭСЛ) возросли с 50 МГц в 1975 году до диапазона 0,3–0,5 ГГц в 1992 году. В середине 90-х появились арсенид галлиевые (GaAs) чипы с тактовыми частотами 6–8 ГГц и матрицы из более 500 вентилях на биполярных транзисторах с гетеропереходами с рабочими тактовыми частотами более

10 ГГц. С учётом гармоник высшего порядка частотные составляющие распространяющихся сигналов простираются от постоянного тока до десятков ГГц.

По планам Semiconductor Industry Association (SIA-San Jose, CA) с 1995 по 2010 год прогресс электроники должен быть существенным [2]. Например, число выводов микропроцессорных интегральных схем увеличится с 512 до 1024. Ёмкость микросхем оперативной памяти увеличится с 64 Мбит до 64 Гбит. Тактовые частоты сигналов, распространяющихся между микросхемой и платой, возрастут со 150 МГц до 475 МГц, а внутренние частоты микропроцессоров возрастут с 330 МГц до 1,1 ГГц. Однако уже сегодня некоторые из этих рубежей превзойдены. При таком повышении быстродействия сигналов и плотности межсоединений искажения электрических сигналов в межсоединениях существенно увеличиваются, что часто является главной причиной, препятствующей росту быстродействия и плотности монтажа электронной аппаратуры.

С ростом быстродействия цифровой техники, проблемы, возникавшие ранее, в основном, перед разработчиками СВЧ аппаратуры, в настоящее время возникают перед самым широким кругом разработчиков электронной аппаратуры. Поэтому, необходимо решать проблему уменьшения искажений электрических сигналов в межсоединениях, т.к. именно она зачастую становится главной преградой на пути создания быстродействующей, компактной и, в то же время, помехоустойчивой и надёжной аппаратуры. Неучёт факторов, составляющих проблему, при проектировании какой-либо части устройства способен стать причиной сбоев и ненадежности в работе устройства в целом, которые трудно локализовать и устранить без больших затрат.

Растёт интерес учёных к этой проблеме, особенно остро проявившейся в межсоединениях печатных плат. Показательным примером этого роста является Международный Вроцлавский Симпозиум по ЭМС. Так, в 1992 году по этой теме был представлен лишь один доклад [3] в секции "Методы уменьшения электромагнитных помех". В 1994 году семь докладов по межсоединениям печатных плат выделены в отдельную секцию "ЭМС в печатных платах". В 1996 году в секции "ЭМС в печатных платах" представлены восемь докладов и обширный пленарный доклад [4], кроме того, организован однодневный семинар "Проектирование печатных плат, отвечающее требованиям ЭМС", включающий девять разделов. В 1998 году представлено четыре доклада в секции "ЭМС печатных плат и интегральных микросхем" и ряд докладов в близких по тематике секциях. В 2000 году секция "ЭМС на уровне компонентов и печатных плат" состояла из двух частей, на которых было сделано восемь докладов, много докладов по проблеме межсоединений состоялось и на других секциях.

Практически в каждом номере известных международных журналов "IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques" и "IEEE Transactions on Circuits and Systems", "IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility" имеются публикации по данной проблеме. Работы, вносящие значительный вклад в её решение, регулярно представляются в тематических выпусках этих и других периодических изданий [5–8]. Выделяется ряд исследований по разработке методов анализа отклика и вычисления параметров межсоединений самой различной сложности, проведённых группами исследователей под руководством таких

учёных как O.A. Palusinski, R. Mitra, K. Tripathi (США), M.S. Nakhla (Канада), R. Pregla (Германия), M. Horno (Испания). Исследованиями по электродинамическому и схемному моделированию межсоединений успешно руководит D.De Zutter (Бельгия). На компьютерную реализацию современных теоретических достижений в моделировании межсоединений быстродействующих электронных схем делают акцент G. Pan, K. Olson, B.K. Gilbert (США). Большой теоретический вклад в решение проблемы анализа МПЛП, сделал F.-Y. Chang (США). Последовательно проводятся исследования, которыми руководят R.F. Harrington, T.K. Sarkar (США) и A.R. Djordjevic (Югославия).

Наконец, последними по очереди, но не по важности следует отметить работы отечественных учёных. Действительно, численный метод, разработанный русским инженером-механиком Галёркиным ещё в 1915 году, стал одним из самых широко распространённых методов решения сложнейших задач электродинамики, в том числе и анализа межсоединений. Теоретические работы В.И. Коваленкова [9,10] по анализу связанных линий передачи во многом предопределили появление важных теоретических исследований по анализу многопроводных линий передачи, выполненных П.И. Кузнецовым и опубликованных в сборнике статей [11], который дважды переиздавался в США [12] и стал предметом многочисленных ссылок современных исследователей межсоединений. Работы известного отечественного математика академика Л.В. Канторовича [13,14] оказали значительное воздействие на развитие численных методов. Например, R.F. Harrington [15] сообщает об их существенном влиянии на его работы по приложению метода моментов к задачам вычисления электромагнитного поля [16,17].

Важные для теории многопроводных линий передачи выводы телеграфных уравнений из уравнений Максвелла представлены, например, в работах [18,19]. Исследования сложных многопроводных структур успешно развивались отечественными учёными, прежде всего, применительно к созданию СВЧ устройств: на основе планарных многопроводных линий [19,20]; с применением многосвязных полосковых структур [21], в т.ч. с возможностью управления [22]; с использованием возможности контролируемого распространения электромагнитных волн в объёмных структурах [23]. Однако, исследовались межсоединения и быстродействующих цифровых схем: для случая одиночных линий с распределёнными по длине нагрузками [24]; для двух связанных линий [25]; для многопроводных межсоединений в однородной [26] и неоднородной диэлектрической среде [27]; для ЭМС печатных плат [28, 29]. Активно ведется разработка универсальных и высокоэффективных моделей межсоединений санкт-петербургской школой [30, 31].

1.2 Подходы к решению проблемы

В данном разделе рассмотрены подходы автора к решению проблемы, которые сводятся к теоретическому и экспериментальному моделированию межсоединений и приложению результатов этого моделирования к конкретным межсоединениям.

1.2.1 Моделирование

Важным этапом совершенствования межсоединений, позволяющим получить высокие характеристики с наименьшими затратами, является моделирование различных процессов, связанных со всем жизненным циклом межсоединений, от их производства до утилизации, например, технологических процессов, а также происходящих при работе межсоединений химических, механических и тепловых процессов. Однако, в первую очередь, важно моделировать электромагнитные процессы, связанные с распространением электрических сигналов в межсоединениях, поскольку именно оно определяет основное функциональное назначение межсоединений.

Различают экспериментальное и теоретическое моделирование. Экспериментальное моделирование возникло сравнительно давно и при отсутствии развитых математических методов и средств вычислительной техники часто было единственно возможным, вполне доступным и удовлетворительным для несложных межсоединений видом моделирования. Однако с ростом плотности и быстродействия межсоединений, появилась необходимость моделирования всё более сложных и тонких процессов. Это привело к усложнению и удорожанию изготовления экспериментальных макетов, необходимости более точного и дорогого измерительного оборудования, росту требований к квалификации исследователя-экспериментатора. Поэтому возросло значение теоретического моделирования межсоединений. Широкое распространение и резкий рост производительности вычислительной техники, а также возможность быстрого получения вычисленных характеристик для любых параметров межсоединений, изменяющихся в самых широких диапазонах, сделали теоретическое моделирование несравнимо эффективнее экспериментального. Кроме того, открылась возможность решения не только задачи анализа, но и синтеза, и оптимизации межсоединений. Однако это требует решения ряда сложных задач по созданию основ теории и моделей, адекватно отражающих реальные процессы, происходящие при передаче сигналов в межсоединениях. На основе построенных моделей необходимо разработать алгоритмы и реализовать их в виде программ, позволяющих получать результаты моделирования.

Всё же, следует отметить, что в ряде случаев остаются ограничения на применение теоретического моделирования, связанные со сложностью определённых видов межсоединений и ресурсами компьютеров. В этих случаях наиболее эффективным, а часто и единственно возможным, остаётся экспериментальное моделирование. Кроме того, известное преимущество экспериментального моделирования над теоретическим заключается в том, что именно практика является окончательной проверкой теории.

Свои достоинства и недостатки имеет каждый вид моделирования, так что в конкретном исследовании они могут взаимно дополнять друг друга. Поэтому далее они рассмотрены более подробно.

Теоретическое моделирование

Распространение электрических сигналов в межсоединениях в самом общем случае описывается уравнениями Максвелла. Поэтому строгое решение задачи вычислительного моделирования межсоединений требует численного решения уравнений Максвелла для граничных условий, определяемых конфигурацией межсоединений, при начальных значениях, задаваемых электрическими сигналами в межсоединениях. Однако необходимые для этого вычислительные затраты весьма высоки даже для относительно простых конфигураций. Поэтому такой анализ, называемый электродинамическим или полноволновым (поскольку он учитывает все типы волн, возникающие в межсоединениях), используется, как правило, только на частотах в десятки и сотни ГГц. При статическом подходе делается упрощающее предположение, что в межсоединениях отсутствуют потери, дисперсия и высшие типы волн, и может распространяться только основная, поперечная волна. Это сводит уравнения Максвелла к телеграфным уравнениям, решение которых гораздо проще, но весьма точно для многих практических межсоединений. При допущении распространения только поперечной волны получают довольно точные результаты даже при наличии небольших потерь в межсоединениях. Этот подход называют квазистатическим. В силу своих достоинств он широко используется исследователями для анализа межсоединений.

При квазистатическом подходе произвольная схема межсоединений представляется обобщенной схемной моделью, состоящей из элементов двух видов: отрезков и их окончаний (рис. 1.1). Отрезок – это распределённая схемная модель отрезка межсоединения, в общем случае, многопроводной линии передачи. Окончание – это сосредоточенная схемная модель неоднородностей или радиоэлементов, расположенных на стыках или концах отрезков межсоединений.

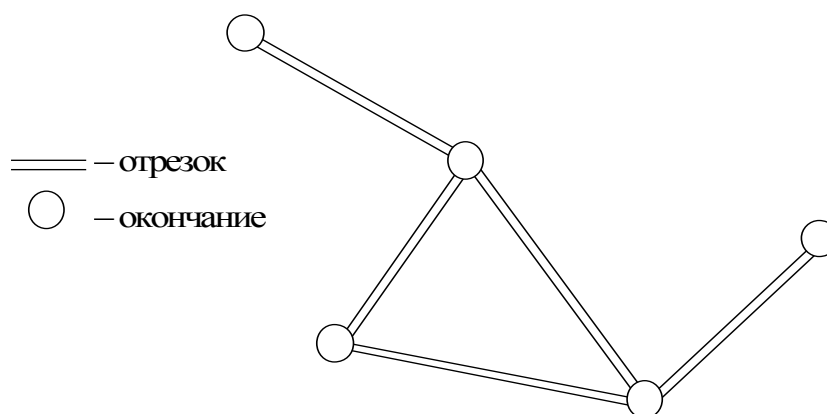


Рис. 1.1. Обобщенная схемная модель произвольной схемы межсоединений

Напряжения и токи в любой точке каждого отрезка МПЛП определяются из телеграфных уравнений с учётом граничных условий на концах отрезка, задаваемых окончаниями. В результате, благодаря квазистатическому подходу, моделирование распространения электрических сигналов межсоединений делится на три независимых друг от друга задачи:

- определение матриц погонных параметров отрезков МПЛП;
- определение параметров трёхмерных неоднородностей;

определение отклика схемы МПЛП на заданное воздействие.

Автором работы, с позиций системного подхода к анализу МПЛП, выполнен обширный и подробный обзор исследований по решению этих задач, от пионерных, этапных работ до самых свежих публикаций. Их анализ показал, что решение любой из трёх этих задач, даже несмотря на упрощения квазистатического подхода, может оказаться весьма сложным в зависимости от сложности конфигураций отрезков МПЛП, их соединений между собой, сложности конфигураций неоднородностей окончаний и наличия в окончаниях комплексных, нелинейных элементов.

Из проведённого обзора становится очевидной особая важность первой из этих трёх задач. Действительно, значения параметров матриц играют ключевую роль, поскольку в интегральном виде содержат в себе всю информацию о геометрической конфигурации и электрических свойствах материалов проводников и диэлектриков, составляющих межсоединения. Кроме того, простые соотношения этих параметров позволяют оценить основные характеристики одиночных и даже связанных межсоединений. Наконец, оказывается, что некоторые методы определения параметров отрезков МПЛП пригодны и для решения второй задачи, т.е. позволяют определить параметры и трёхмерных неоднородностей. Поэтому вычислению матриц параметров в данной работе уделяется большое внимание и посвящён раздел 2.

Заключительная задача определения отклика схемы МПЛП на заданное воздействие может решаться отдельно, в предположении, что параметры отрезков межсоединений и неоднородностей на их стыках известны. В результате определяется форма сигнала в заданной точке схемы межсоединений. Решение этой задачи сильно осложняется при изменении параметров отрезков межсоединений по длине отрезка и при учёте их дисперсии. Кроме того, значительные трудности возникают при учёте нелинейного характера окончаний межсоединений, произвольных входных воздействий, а также в схемах со сложной конфигурацией соединений отрезков МПЛП. Однако для некоторых частных случаев воздействий и конфигураций оказывается возможным получение даже аналитических моделей для вычисления отклика. Вычислению отклика конфигураций межсоединений различной сложности посвящён раздел 3.

Экспериментальное моделирование

Экспериментальное моделирование межсоединений предполагает решение следующих задач:

- макетирование межсоединений;
- экспериментальное определение электрических параметров межсоединений;
- экспериментальное определение отклика межсоединений.

Отметим, что экспериментальное моделирование межсоединений часто начинается с эвристического поиска (как правило, основанного на анализе известных прототипов) геометрической конфигурации проводников и диэлектриков, которая бы отвечала совокупности предъявляемых к ней основных требований. Если удастся обеспечить (хотя бы по предварительным оценкам) выполнение

определённой совокупности основных конструктивных, технологических, стоимостных и электрических требований, то принимается решение о дальнейшем исследовании конкретной конфигурации. Значимость этапа поиска новых конфигураций межсоединений заключается в том, что при успешном выборе новой конфигурации от неё можно ожидать и новых возможностей.

Макетирование межсоединений является той стадией, которой не удаётся избежать при экспериментальном моделировании межсоединений. Она необходима для экспериментального определения как параметров, так и отклика межсоединений. Макетирование новых конструкций межсоединений требует проработки технологических вопросов изготовления межсоединений в производственных условиях. Выбор конструкции макетов должен быть тщательно продуман с учётом особенностей проведения измерений, а выбор диапазона параметров конструкции – с учётом ожидаемых результатов. От этих факторов зависит количество макетов с различными параметрами, а значит, и затраты на их изготовление, которые могут увеличиться при ошибочном выборе.

Непосредственное экспериментальное определение электрических параметров МПЛП выполнимо на основе простой и доступной методики измерений ёмкостных или индуктивных параметров МПЛП с помощью измерителя ёмкостей и индуктивностей [32]. Другим направлением является применение косвенных методов, например, рефлектометрии. Так, для определения погонных параметров МПЛП с однородным диэлектрическим заполнением предложено два метода: прямой метод и метод отражения [33]. В случае неоднородной среды матрицы $[C]$ и $[L]$ получают из измеренных матриц характеристического импеданса и модальных скоростей, используя временной отклик линии на импульсную или ступенчатую функцию [34], или измеряя импеданс в частотной области при коротком замыкании и на холостом ходу для различных конфигураций [35]. Важным вкладом в решение задачи определения электрических параметров МПЛП стала работа [36], в которой показано вычисление параметров связанных линий из полученных с помощью измерений волновых скоростей и коэффициентов преобразования, которые характеризуют развязанную эквивалентную схему многопроводной системы. В ней также описан метод резонансных частот, позволяющий определять волновые скорости с большей точностью, чем временными методами. Кроме того, в работе описан способ определения индуктивных параметров МПЛП из измерения ёмкостных параметров и характеристических импедансов, позволяющий обойти трудности, связанные с прямым измерением индуктивностей МПЛП.

В заключение этого краткого обзора экспериментальных методов определения первичных параметров МПЛП отметим, что существенные неоднородности, вносимые в измерительный тракт, небрежность или неправильная методика измерений зачастую значительно снижают точность полученных результатов [37]. Известно также, что погрешность измерения внедиагональных элементов матриц МПЛП значительно больше, чем диагональных. Так, при вполне приемлемой погрешности в 1% для диагональных элементов, погрешность для внедиагональных элементов очень велика и составляет 25% [95,38]. Кроме того, как видно из обзора, в развитии методов косвенного определения параметров во

многим используются, собственно параметры экспериментально полученного отклика МПЛП, требующие, к тому же, существенных математических преобразований.

В данной работе не используются методы экспериментального определения матриц параметров МПЛП, а отдаётся предпочтение экспериментальному определению отклика МПЛП. Действительно, определение отклика не требует специальных измерительных приборов и, как правило, сводится к более доступному осциллографу со встроенным генератором. Найденные матрицы параметров – лишь предварительный результат, а известный отклик – результат окончательный. Именно по параметрам отклика делаются окончательные выводы об уменьшении искажений в межсоединениях и сравниваются межсоединения разных типов. Так, для временного отклика одиночной линии одним из основных параметров является время фронта или спада импульса на выходе линии. В случае связанных линий, как правило, исследуются уровни перекрёстных помех на ближнем и дальнем концах пассивных линий. Результаты экспериментального моделирования, показывающие возможности уменьшения искажений сигналов в межсоединениях, приведены в разделе 4.

1.2.2 Приложение результатов моделирования

Проблема уменьшения искажений электрических сигналов в межсоединениях универсальна, поскольку возникает практически на всех структурных уровнях: в микросхемах (межкристальные соединения в многокристальных чипах, корпус СБИС с большим числом выводов); в субблоках (печатные платы, платы с тонкопроволочным монтажом и прочие монтажные платы); в блоках (многоконтактные соединители и объединительные панели); в шкафах (многопроводные жгуты и кабели); в системах (структурированные кабельные сети, линии электропередачи). Одним из следствий этого является то, что один и тот же результат теоретического моделирования (например, разработанная модель или обнаруженная закономерность поведения характеристики) может быть применен в самых разных структурных уровнях и успешно использоваться в различных отраслях техники. С другой стороны, появление новых конструкций конкретных межсоединений может ставить новые задачи для их адекватного теоретического моделирования, а также давать новые возможности уменьшения искажений электрических сигналов в межсоединениях.

Таким образом, совокупность результатов теоретического и экспериментального моделирования становится мощным инструментом для дальнейшего совершенствования межсоединений. Графики зависимостей характеристик межсоединений от параметров конфигурации позволяют судить о потенциальной возможности получения требуемых характеристик и сравнивать характеристики исследуемых межсоединений с характеристиками известных. В результате, открываются дополнительные возможности уменьшения искажений электрических сигналов в межсоединениях. Примеры приложения результатов теоретического и экспериментального моделирования к межсоединениям с двухслойным диэлектриком, показывающие многочисленные возможности уменьшения искажений электрических сигналов, представлены в разделе 5.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ПАРАМЕТРОВ

В данном разделе рассмотрены матрицы параметров межсоединений, выбор методов их вычисления и подробно освещен один из них, метод моментов.

2.1 Матрицы параметров

В данном разделе сначала перечислены виды матриц параметров межсоединений, а затем приведён обзор методов вычисления матриц первичных параметров межсоединений.

2.1.1 Виды матриц параметров отрезков МПЛП

Из геометрических параметров конструкции отрезка МПЛП, а также электрических и магнитных параметров материалов этой конструкции получают четыре матрицы погонных параметров размером $N \times N$ (где N - число сигнальных проводников МПЛП, а $(N+1)$ -ый проводник является опорным), полностью описывающих элемент отрезка МПЛП длиной dX и часто называемых матрицами первичных параметров.

[C] – матрица погонных коэффициентов электростатической индукции (далее называемая ёмкостной матрицей).

[L] – матрица погонных коэффициентов электромагнитной индукции (далее называемая индуктивной матрицей).

[G] – матрица погонных проводимостей;

[R] – матрица погонных сопротивлений.

Необходимо отметить, что элементы указанных матриц, в общем случае, могут быть частотно-зависимыми и изменяться по длине отрезка МПЛП.

Из матриц погонных параметров МПЛП получают удобные для последующего анализа матрицы [Z] и [Y], а также полностью характеризующие отрезок МПЛП матрицы [A], [T] и [S]. Связь этих матриц с матрицами первичных параметров для случая без потерь показана в [39], а формулы для случая с потерями приводятся в [21]. Метод получения матрицы [A] для нерегулярной МПЛП рассмотрен в [40].

В [41] отрезок МПЛП описан ABCD-матрицей, которую получают перемножением соответствующих матриц отдельных звеньев отрезка МПЛП или преобразованием из матрицы [S] параметров рассеяния. Такое описание успешно используется многими исследователями для анализа широкого класса МПЛП.

2.1.2 Методы вычисления матриц параметров отрезков МПЛП

Приведем краткий обзор основных методов вычисления первичных параметров отрезков МПЛП. Эти методы условно делятся на аналитические и численные. Рассмотрим сначала методы определения матриц [C] и [L], а затем – матриц [G] и [R], учитывающих потери в МПЛП.

Аналитические методы, к которым относятся, например, методы конформных отображений, отличаются тем важным достоинством, что позволяют получить точные аналитические формулы в законченном виде, но для небольшого

числа относительно простых конфигураций. Поэтому, для сложных МПЛП применение аналитических методов весьма ограничено, и окончательное вычисление параметров, как правило, может производиться лишь при помощи различных упрощений и приближений. Примеры таких вычислений ёмкостных параметров приведены в [42], а индуктивных параметров – в [43]. В справочнике [44] приведены таблицы значений краевых ёмкостей для пяти различных областей и формулы для приближённой оценки ёмкостных и индуктивных параметров ряда конфигураций МПЛП. Путём выделения частичных областей сложной многосвязной полосковой структуры и применения к ним метода конформных отображений в [21] рассчитаны её ёмкостные и индуктивные параметры, значения которых близко совпали с измеренными.

Нельзя не отметить, что развиваются и методы получения точных формул для некоторых полных конфигураций МПЛП. Так, в [45] рассматриваются расположенные на границе раздела двух диэлектриков копланарные МПЛП, с проводниками, имеющими различные ширины и разности, обратными проводниками которых могут быть боковые полубесконечные плоскости или один из проводников. Методом конформных преобразований Шварца-Кристоффеля получены в законченном виде точные формулы для элементов погонных ёмкостной и индуктивной матриц, выраженных через гиперэллиптические интегралы, численная оценка которых может быть эффективно выполнена по формулам квадратуры Гаусса-Чебышева. Работа является ярким примером эффективности и точности метода конформных преобразований и его применимости к довольно сложной конфигурации МПЛП: в ней показано, что оценка параметров этим методом приблизительно в десять раз быстрее оценки той же конфигурации одним из самых быстрых численных методов, спектральным методом.

В работе [46] конформное отображение используется для взаимного преобразования ёмкостных матриц планарной и цилиндрической МПЛП в многослойной среде. Выводится точное аналитическое выражение для ёмкостной матрицы путём решения задачи с системой уравнений с двойными рядами посредством задачи граничных значений Вольтерры. Решение выражается, хотя и через бесконечные матрицы, но с очень хорошими свойствами сходимости. Численные примеры показывают, что метод даёт точные результаты, а также вычислительно эффективен для линий, имеющих большое число проводников.

В заключение рассмотрения аналитических методов отметим, что наличие строгих аналитических формул даже для относительно простых конфигураций имеет большое значение и постоянно используется исследователями для проверки точности постоянно совершенствующихся численных методов определения параметров МПЛП самой различной сложности.

Действительно, сложность МПЛП как объекта моделирования, имеющего, в общем случае, большое число проводников с произвольными размерами, поперечным сечением, расположением и ориентацией, которые могут находиться в среде с произвольным диэлектрическим заполнением, часто делает численные методы единственно приемлемыми для определения параметров отрезков МПЛП. Поэтому, разработка численных методов вычисления параметров МПЛП развивается очень интенсивно. Среди основных численных методов,

широко используемых в последние годы для вычисления параметров МПЛП, выделяются методы:

- 1) спектральный;
- 2) вариационный;
- 3) функций Грина;
- 4) моментов;
- 5) интегральных уравнений;
- 6) прямых;
- 7) конечных разностей;
- 8) конечных элементов;
- 9) граничных элементов.

Вычисление матрицы [С]

Спектральный метод

Для определённых конфигураций МПЛП (в частности, при планарном расположении проводников на плоской диэлектрической границе над плоскостью земли) получение выражений для определения параметров МПЛП оказалось особенно эффективным в спектральной области. Такой подход называется спектральным, а методы, с которыми он используется, часто называются спектральными методами. Так, например, при оценке ёмкостной матрицы для решения интегрального уравнения в спектральной области может использоваться метод Галеркина. Этот подход применён для расположенной над плоскостью земли копланарной МПЛП с учётом конечной толщины полосок и скин-слоя [47], для точного и эффективного анализа микрополосковой МПЛП с произвольной толщиной [48], для МПЛП с проводниками трапецеидального поперечного сечения [49] для многослойной МПЛП при сильно выраженном скин-эффекте в проводниках произвольного поперечного сечения [50], для копланарной МПЛП в многослойной среде с диэлектрической и магнитной анизотропией и потерями [51].

Вариационный метод

Методы вычисления параметров системы линий передачи, в которых применяется принцип минимизации общей энергии системы, получили название вариационных. Этот подход широко используется, поскольку он даёт верхнюю и нижнюю границы элементов ёмкостной матрицы, позволяя получать требуемую точность.

Вариационный подход в спектральной области применён для полосковой линии в среде из трёх диэлектриков [52], для полосковой линии с многослойным диэлектриком [53], для копланарных МПЛП [54], для оценки верхней и нижней границ ёмкостей одиночной и связанной микрополосковых линий, содержащих несколько дополнительных проводящих полосок, размещённых на различных границах диэлектрических слоев [55], для планарных линий передачи с полосками конечной толщины на многочисленных подложках, расположенных на поддерживающих выступах и пьедесталах [56].

Вариационный метод нашёл своё применение и в случаях с анизотропным диэлектриком для одиночного микрополоска [57], для связанных микрополосковых линий на однослойных [58] и двухслойных [59] анизотропных подложках, для произвольной планарной МПЛП в многослойной анизотропной диэлектрической среде с произвольными прямоугольными граничными условиями [60], [61]. Для копланарной МПЛП в многослойной анизотропной диэлектрической среде применён вариационный метод в пространственной области [62].

Метод функций Грина

Важным для вычисления ёмкостной матрицы отрезка МПЛП является метод функций Грина [63]. Метод является усовершенствованием метода подобластей, в котором допущение о распределении плотности заряда поверхности "лестничной функцией", то есть постоянной плотности заряда по каждой подобласти, заменяется допущением о кусочно-линейной плотности заряда по поверхностям проводника и параметры плотности заряда определяются подбором потенциала по методу наименьших квадратов для граничных условий задачи. Многочисленные проводники могут быть любого поперечного сечения, которое можно адекватно аппроксимировать многоугольником. В методе использованы найденные для некоторых геометрий МПЛП точные аналитические выражения для функций Грина, учитывающие условия непрерывности поля смещения на границах раздела диэлектриков. Достоинством такого подхода является необходимость дискретизации лишь для поверхностей проводников, что значительно уменьшает порядок матрицы. Недостатком – необходимость численного интегрирования элементов матрицы из-за сложного вида функций Грина, включающих, к тому же, бесконечные ряды, которые должны усекаться.

Необходимо также отметить, что аналитические выражения для функций Грина [63] известны, хотя и для важного, но небольшого класса геометрий МПЛП: один конечный проводник земли и одна диэлектрическая граница; одна бесконечная плоскость земли и одна диэлектрическая граница; две бесконечные плоскости земли без диэлектрических границ. Для двух слоёв диэлектрика функция Грина состоит из четырёх выражений, содержащих по два бесконечных ряда, а для трёх слоёв диэлектрика – из девяти выражений [64]. Получение функции Грина такого типа для случая более трёх диэлектрических слоёв считается мало практичным, поскольку для N диэлектрических слоёв она будет состоять из $N \cdot N$ выражений, каждое из которых содержит $N-1$ бесконечный ряд [65]. Однако с помощью комплексных образов заряда в многослойной диэлектрической среде предлагается вычисление функций Грина гораздо менее сложного вида [66].

Метод моментов

Одним из наиболее эффективных методов, широко применяемых для вычисления поля, является метод моментов. Известен алгоритм для вычисления методом моментов ёмкостной и индуктивной матриц МПЛП в двумерном случае для произвольного числа диэлектрических слоёв и произвольного числа проводников конечного поперечного сечения или бесконечно тонких, над одной

плоскостью земли или между двумя параллельными плоскостями земли [65]. В развитие этой работы рассмотрены случаи МПЛП, где не только проводники, но и диэлектрические области, и земляной проводник могут иметь произвольные поперечные сечения [67], а также трёхмерный случай МПЛП с произвольной ориентацией проводников конечной длины [68].

Метод интегральных уравнений

Метод моментов является частным случаем более общего метода интегральных уравнений. Примером его применения для вычисления матриц параметров МПЛП является метод, пригодный для МПЛП в многослойной диэлектрической среде, проводники которой могут быть поперечного сечения в виде произвольного многоугольника, а также бесконечно тонкими [69]. Новизна метода заключается в двух аспектах. Ядром интегрального уравнения является пространственная функция Грина слоистой среды. Точность решения повышается за счет применения базисных функций, которые точно моделируют сингулярное поведение плотности заряда вблизи края проводника. В развитие указанной работы представлен значительно улучшенный метод [70], позволяющий без потери точности или существенного увеличения машинного времени по сравнению с существующими методами обходить межсоединения различных технологий с проводниками сложной формы, помещёнными в различные диэлектрические слои.

Метод прямых

Одним из эффективных методов, применяемых для вычисления параметров МПЛП, является метод прямых. Так, для многослойных планарных МПЛП использован полуаналитический метод прямых с неэквидистантной дискретизацией [71], сходимость которого улучшается с применением экстраполяции Ричардсона [72].

Обращают на себя внимание разносторонние приложения и усовершенствования метода прямых для структур с конечной толщиной металлизации [73], для конфигураций на анизотропной подложке [74], для прямых и искривлённых планарных МПЛП [75], для планарных СВЧ структур произвольной формы [76], для многослойной цилиндрической структуры в цилиндрических координатах при угловой дискретизации [77].

Методы конечных разностей, конечных элементов и граничных элементов

Эти методы, в отличие от рассмотренных выше, являются наиболее общими методами решения различных прикладных граничных задач. Применение их для вычисления параметров МПЛП требует значительных затрат времени и памяти компьютера для операций с матрицами большого размера, но допускает анализ самых различных и сложных конфигураций, что определяет их успешное использование в современных исследованиях.

Так, например, в работе [78] разработан универсальный и мощный метод конечно-разностного решения для определения ёмкостей в системах близко расположенных параллельных проводников и представлены результаты для

конфигураций, типичных для многоуровневых структур СБИС. Одной из разновидностей метода конечных разностей является метод схемных аналогий [79], предложенный для структур в многослойной среде с потерями.

Для вычисления ёмкостной и индуктивной матриц МПЛП используют и метод конечных элементов [80]. Недостатки метода, связанные с необходимостью искусственного окружения МПЛП идеально проводящим экраном, можно устранить с помощью получения асимптотического граничного условия высшего порядка, которое дает более точные результаты [81].

Для повышения точности и улучшения вычислительной эффективности вычисления матрицы ёмкостей МПЛП методом граничных элементов можно включить в базисные функции краевые сингулярности заряда и тока около углов поперечных сечений сигнальных линий [82], а также использовать волновые преобразования [83]. Известен метод, объединяющий в себе метод моментов для получения граничного интегрального уравнения решаемой задачи и метод граничных элементов для описания границ в сечении МПЛП [84]. Высокие вычислительные возможности предоставляет многополюсный ускоренный метод граничных элементов для вычисления ёмкости трёхмерных структур [85], распространённый на случай произвольной кусочно-постоянной диэлектрической среды [86]. В последней работе представлены результаты, показывающие, что метод точен, имеет приблизительно линейные вычислительные затраты при усложнении исследуемой структуры и может быть примерно на два порядка быстрее, чем стандартный метод граничных элементов, основанный на факторизации матриц.

Вычисление матрицы [L]

Вычисление матрицы [L] для МПЛП требует, в общем случае, решения магнитостатической задачи. Однако, в статическом приближении для двумерного случая без потерь вычисление матрицы [L] возможно через матрицу [C], полученную в результате решения соответствующей электростатической задачи. Матрица [L] равна произведению магнитной и диэлектрической проницаемостей свободного пространства, умноженному на обращённую матрицу [C], которая вычислена для случая, когда та же геометрия проводников МПЛП помещена в свободное пространство [65]. Аналогично можно вычислить матрицу [L] и для более общего случая диэлектриков с различной магнитной проницаемостью [87]. Для этого вычисляется матрица [C] для той же геометрии проводников, но с диэлектрической проницаемостью каждого слоя, заменённой величиной обратной его магнитной проницаемости [70]. Подобным же способом вычисляется матрица [L] для МПЛП в наиболее общей среде с диэлектрической и магнитной анизотропией и потерями [51].

Что касается трёхмерного случая, то таким же образом получают приближённые матрицы [L] и для конфигураций МПЛП, плавно изменяющихся вдоль по длине, вычисляя матрицы [C] и [L] в ряде сечений вдоль по длине отрезка МПЛП. Этот же подход применим, в первом приближении, и для сильно выраженных нерегулярностей вдоль отрезка МПЛП, однако пригоден лишь для грубых оценок.

Следует отметить, что в любом случае подход, когда матрица $[L]$ вычисляется через инверсию матрицы $[C]$ строго справедлив только в статическом приближении, полагающем отсутствие потерь. Возможна его применимость и в квазистатическом приближении, допускающем небольшие потери в среде и в проводниках, однако, нужно помнить, что с ростом потерь границы применимости квазистатического приближения сужаются. Оценка этих границ при наличии потерь в среде с диэлектрической и магнитной анизотропией проведена в работе [51]. Что касается случая с потерями в проводниках, то подход, когда матрица $[L]$ вычисляется через инверсию матрицы $[C]$ и полагается частотно-независимой, является только приближённым [88]. Во-первых, он не рассматривает магнитную энергию, запасаемую внутри проводников, которая может быть значительной в низкочастотной части спектра. Во-вторых, он даёт распределение тока неточное на низких частотах, поскольку полагает сильно выраженными эффект близости и краевые эффекты, что в реальности имеет место лишь на более высоких частотах. Тогда как не учёт небольшой по величине внутренней индуктивности проводников, нелинейно зависящей от частоты, может привести к большим ошибкам при оценке перекрёстных помех и спада фронта импульсных сигналов, распространяющихся в МПЛП [89].

Потери в МПЛП

Общеизвестным допущением, справедливым во многих случаях и значительно упрощающим анализ линий передачи, является допущение об отсутствии в них потерь. Возможно, поэтому оценке потерь столь сложного объекта моделирования, как МПЛП посвящено довольно мало работ. Рассмотрим некоторые из них, касающиеся численной оценки потерь в МПЛП.

В этапной работе [90], в отличие от прежних работ, в которых моделировались потери лишь в одномодовых линиях передачи конкретных конфигураций, впервые предложено гораздо более общее решение, пригодное для вычисления потерь в МПЛП с проводниками произвольных поперечных сечений в многослойной диэлектрической среде и применимое к среде с многочисленными диэлектриками другой формы. Матрица проводимости $[G]$ найдена методом моментов, как в случае без потерь, рассмотренном в [65], с той лишь разницей, что реальные диэлектрические постоянные заменяются комплексными, учитывающими потери диэлектриков. (Необходимо заметить, что матрицы $[C]$ и $[G]$ могут зависеть от частоты, и неучёт даже небольшой частотной зависимости относительной диэлектрической проницаемости, а особенно, потерь диэлектриков, может привести к большим ошибкам при оценке перекрёстных помех и спада фронта [89]). Для вычисления матрицы сопротивлений $[R]$ с учётом потерь в нижней плоскости земли в [90] применено развитие метода возмущений, требующее нахождения мод МПЛП из решения задачи собственных значений, а затем постоянных затухания всех мод. В предлагаемом решении для металлических поверхностей МПЛП применяется аппроксимация поверхностным сопротивлением проводника. Такой подход в спектральной области делает возможным квазистатический анализ линий с потерями в проводниках для режимов, как со слабым, так и сильным скин-эффектом, с многослойными изотропными и

анизотропными подложками, в том числе полупроводниковыми и/или магнитными [91].

Однако точный учёт частотной зависимости потерь в проводниках линий передачи требует моделирования скин-эффекта и эффекта близости проводников друг к другу, которое, в свою очередь, делает необходимым сложное вычисление распределения тока по поперечному сечению проводников. Для точного учёта частотной зависимости потерь в проводниках МПЛП предложено использовать интегральное уравнение по поверхности проводников [88], позволяющее получить матрицы $[R]$ и $[L]$ с учётом скин-эффекта [92]. Точное определение потерь из-за скин-эффекта существенно зависит и от моделирования поверхностного заряда в проводниках МПЛП [70]. Известно применение метода возмущённого статического приближения для исследования точного распределения тока и постоянных распространения МПЛП с учётом скин-эффекта и эффекта близости [93].

Основные результаты раздела

Проведённый обзор методов вычисления параметров МПЛП и анализ публикаций показывают, что теоретическая разработка методов развивается очень интенсивно и в самом широком плане, как по числу различных методов, так и по совершенствованию их функциональных и вычислительных возможностей. Однако обращают на себя внимание и некоторые недостаточно полно отражённые в литературе вопросы.

Если в конкретной публикации, как правило, чётко показываются виды конфигураций, обрабатываемых методом, и ясно представляются достоинства метода, то обычно ничего не говорится о недостатках метода, которые, как правило, указываются лишь авторами не скоро появляющихся последующих работ, посвящённых совершенствованию данного метода. К сожалению, такая ситуация существенно затрудняет правильный выбор современных методов для их применения в целях моделирования.

В редких работах представлены алгоритмы, доведённые до окончательных формул, готовых для программной реализации. Практически отсутствуют работы, в которых опубликованы готовые и проверенные программы. Известна [44] программа вычисления методом интегральных уравнений без учёта потерь матриц ёмкостных коэффициентов и матрицы рассеяния для отрезков нескольких параллельных полосок нулевой толщины на диэлектрической подложке с одной, двумя общими плоскостями или без них. Матрицы $[L],[C],[R],[G]$ широкого класса многопроводных линий в многослойном диэлектрике вычисляются методом моментов [94].

Очень мало работ посвящено анализу нескольких методов и сравнительной оценке их возможностей. К ним относится работа [95], в которой обстоятельно анализируются теоретические основы и представляются алгоритмы трёх разных методов: вариационного метода, метода функций Грина и метода моментов. Один из важных выводов, следующих из этой работы, заключается в том, что каждый метод имеет свою нишу, т.е. является максимально эффективным для определённых случаев. Между тем, отсутствуют сообщения о свободно доступ-

ных комплексах программ, реализующих несколько методов, позволяющих эффективное и точное вычисление параметров межсоединений определённого вида.

Таким образом, можно констатировать, что вопросы разработки алгоритмов и создания на их основе комплексов программ для эффективного вычисления параметров межсоединений различной степени сложности несколькими методами, исследованы недостаточно полно.

2.2 Выбор методов вычисления

Для эффективного вычисления электрических параметров межсоединений, прежде всего, необходимо правильно выбрать методы вычисления. Критерии выбора обычно зависят от многих факторов, но главным из них, является исходная конфигурация межсоединений.

В случае упрощённого анализа каждый сигнальный проводник межсоединения считают полоской бесконечно малой толщины. При более строгом подходе необходим учёт конечной толщины полоски, поскольку с уплотнением межсоединений толщина полоски становится сравнимой с её шириной. В общем случае, поперечное сечение полоски принято считать прямоугольником. Поперечное сечение реальной полоски отличается от прямоугольного и представляет собой трапецию из-за особенностей травления фольги или произвольную фигуру после нанесения на полоску покрытия. Это существенно влияет на электрические параметры межсоединений [96]. Выбор особо тонкой фольги для межсоединений способен привести к заметному влиянию на поперечное сечение проводника любых неровностей и даже шероховатостей фольги, создаваемой для лучшей адгезии к подложке [97]. Поэтому, для вычисления параметров желателен метод, пригодный для проводников с поперечным сечением произвольной формы.

В зависимости от числа проводников (не считая опорного) обычно рассматриваются: одиночный проводник (характеристики одиночной линии), два проводника (учёт взаимовлияний в паре связанных линий) и произвольное число проводников (строгий учёт взаимовлияний всех проводников в МПЛП). В общем случае, размеры поперечного сечения для разных сигнальных проводников не одинаковы.

На выбор методов вычисления параметров влияет также расположение сигнальных проводников. Наиболее простым для анализа является планарное расположение. Однако возможно расположение параллельных проводников на разных сигнальных слоях, а значит, на разном расстоянии от опорного проводника. Поэтому, желателен метод, допускающий произвольное расположение проводников относительно опорного и друг друга.

Диэлектрическое заполнение межсоединений может состоять из нескольких слоёв диэлектриков, в том числе с разной диэлектрической проницаемостью. Защитные и вспомогательные адгезионные диэлектрические слои ещё более увеличивают число диэлектрических слоёв. Строгий учёт реальной конфигурации межсоединений требует учёта кривизны границ раздела диэлектриков [98].

Необходимо учесть особенности и опорного проводника межсоединений. Часто его полагают бесконечно протяжённой плоскостью бесконечно малой толщины. Однако в ряде случаев такая идеализация некорректна. Поэтому, необходим учёт влияния конечной протяжённости и толщины опорной плоскости МППП [99]. Кроме того, следует учесть влияние отверстий в плоскости и влияние опорного проводника, выполненного в виде сетки. Такой анализ довольно сложен, но актуален. По этому поводу следует выделить работу [100], в которой рассмотрены параметры одиночной микрополосковой линии передачи с опорным проводником в виде сетки с различной ориентацией ячеек относительно сигнальной полоски, и работу [101] для пары связанных полосковых линий. На определённых участках межсоединений шины земли и питания могут выполнять роль второй плоскости земли для сигнальных линий.

Таким образом, даже для двухмерного случая вычисления параметров различных видов межсоединений платы необходим достаточно общий и универсальный метод. Требования к методу становятся ещё более строгими, если необходимо вычисление параметров межсоединений для трёхмерного случая, например, для оценки неоднородностей, создаваемых короткими отрезками, изгибами, переходными отверстиями или перекрестьями межсоединений.

Однако при способности универсальных методов обрабатывать самый широкий класс межсоединений они обладают низкой скоростью вычисления сравнительно простых конфигураций. Более простые методы, обрабатывающие узкий круг конфигураций, как правило, работают значительно быстрее универсальных методов, обрабатывающих те же конфигурации. В частности, чем большая часть алгоритма реализована в аналитическом виде, тем больше его вычислительная эффективность в большинстве случаев. Известен подход к вычислению параметров межсоединений, основанный на использовании результатов вычислений, полученных точными численными методами, когда точные зависимости аппроксимируются аналитическими выражениями. Это позволяет существенно сократить время вычисления, успешно использовать полученные формулы для оценки характеристик межсоединений в определённом диапазоне параметров и даже получить формулы для синтеза параметров. Отметим, что этот подход стал прототипом идеи создания нейронных моделей, широко применяемой в настоящее время, в том числе и для вычисления матриц параметров межсоединений [102].

Учитывая сказанное выше и обзор методов, выбор автора пал на три метода, совместная реализация которых даёт комплекс программ для эффективного вычислительного моделирования широкого класса межсоединений. Это метод аппроксимации данных, вариационный метод и метод моментов. Выбор именно этих методов определяется рядом их достоинств, совокупность которых успешно дополняет друг друга.

Так, метод аппроксимации данных отличается, прежде всего, аналитическими формулами для решения задач анализа и даже синтеза. Очень перспективна возможность его применения, если требуется высокая скорость вычислений, к любым другим данным, заранее полученным точными методами.

Вариационный метод уникален тем, что позволяет осуществить оценку как верхней, так и нижней границ искомых параметров, позволяя тем самым получить заданную точность вычисления. Активно разрабатываемые в последние годы приложения вариационного метода к всё более сложным конфигурациям линий делают его применимым к широкому классу межсоединений.

Наконец, метод моментов широко известен своей отработанностью и применимостью к межсоединениям с произвольной формой поперечного сечения. Метод даёт довольно высокую скорость вычислений при относительно невысоких требованиях к ресурсам компьютера.

В диссертационной работе [103] автором подробно рассмотрены все три перечисленных метода: представлены алгоритмы с готовыми для программной реализации формулами, выполнена оценка точности результатов вычислений посредством их сравнения с опубликованными в литературе данными для различных конфигураций и параметров линий, приведены варианты разработанных программ для всех трёх методов. В частности, показана реальная применимость метода моментов для анализа широкого круга двумерных конфигураций. Кроме того отмечена известная из литературы возможность его развития и для трёхмерных конфигураций, а также для получения матрицы проводимостей $[G]$, учитывающей потери в диэлектриках. Наконец, известно очень широкое применение метода моментов не только для квазистатического, но и для электродинамического анализа. Поэтому особое внимание автора, в плане приложения сил к дальнейшему совершенствованию методов вычисления параметров межсоединений, привлёк именно метод моментов.

2.3 Метод моментов

Одной из трудностей, с которыми сталкивается исследователь при анализе работ, посвящённых вычислению параметров систем проводников и диэлектриков, является необходимость глубокого понимания теоретической подоплёки рассматриваемых алгоритмов и их взаимосвязей при разнообразной терминологии, используемой разными авторами. При рассмотрении метода моментов указанная проблема становится особенно острой.

Наиболее действенным подспорьем в преодолении этих трудностей является знакомство с работами опытных авторов, стоящих у истоков этих методов или творчески развивающих их для конкретных приложений. Весьма полезна для этого небольшая статья [104]. В ней приводится краткая история развития математических методов, связанных с методом моментов и используемых для вычисления электромагнитного поля, затем, даётся краткое описание общей теории с акцентом на различные точки зрения, которые приводят к разным названиям этого метода, а также показываются его взаимосвязи с другими методами. Важную роль в понимании автором деталей приложения метода моментов к вычислению матриц параметров сыграла крупная работа [95]. Поэтому наиболее подходящим для единого изложения новых моделей, разработанных автором и представленных далее в данном разделе, представляется подход именно этой работы. Общее достоинство всех новых моделей – вычисление элементов матрицы СЛАУ по точным аналитическим формулам.

Вычисление ёмкостной матрицы двумерной системы проводников, с границами проводник-диэлектрик произвольной ориентации, в многослойной диэлектрической среде (когда существуют границы диэлектрик-диэлектрик ортогональные только оси Y) над идеально проводящей плоскостью [236] распространено на случаи, когда существуют границы диэлектрик-диэлектрик: ортогональные только оси Y и оси X ; произвольной ориентации. Кроме того, отдельно получена модель для частного случая системы, в которой могут быть границы раздела (и проводник-диэлектрик, и диэлектрик-диэлектрик) только ортогональные оси Y или оси X .

Вычисление ёмкостной матрицы трёхмерной системы проводников и диэлектриков с границами прямоугольной формы, имеющими только ортогональную ориентацию, причём границы проводник-диэлектрик имеют любую ортогональную ориентацию (ортогонально X , ортогонально Y , ортогонально Z), а границы диэлектрик-диэлектрик – только ортогонально Y (т.е. диэлектрическая среда может быть только слоистой, причём только в плоскости XZ) [95], распространено на случай когда допустима любая ортогональная ориентация границ диэлектрик-диэлектрик (т.е. диэлектрическая среда может быть слоистой в любой плоскости, а также не только слоистой, но и с произвольной сложностью ортогональных границ диэлектрик-диэлектрик).

2.3.1 Теоретическая основа

Как уже отмечалось, задача электрического моделирования системы межсоединений произвольной сложности сводится к решению уравнений Максвелла, зависящих от времени и от трёх координат. Однако реализация такого подхода на практике часто становится нереальной из-за крайне высоких требований к ресурсам компьютера, поэтому прибегают к различным упрощениям, справедливым при определённых условиях. В рассматриваемом ниже методе применяется ГЕМ аппроксимация, которая сводит уравнения Максвелла к частному случаю эллиптического дифференциального уравнения с частными производными, известному как уравнение Пуассона/Лапласа (полагается, что все заряды и токи сосредоточены на поверхности проводников, как в случае бесконечной проводимости проводников) с соответствующими граничными условиями. В операторной форме это уравнение имеет вид

$$\mathbf{L}\phi(\underline{r}) = \rho(\underline{r}), \text{ где } \mathbf{L} = -\varepsilon\nabla^2, \quad (2.1)$$

где $\phi(\underline{r})$ – электростатический потенциал в точке \underline{r} , а $\rho(\underline{r})$ – плотность заряда в точке \underline{r} . Диэлектрическая проницаемость ε полагается изотропной и константой.

Поскольку, в общем, полагаются известными граничные условия по приложенному напряжению, а не по плотности заряда, уравнение (2.1) записывается в виде

$$\phi(\underline{r}) = \mathbf{L}^{-1} \rho(\underline{r}), \text{ где } \mathbf{L}^{-1} = \int G(\underline{r} | \underline{r}') d\Gamma, \quad (2.2)$$

где $G(\underline{r} | \underline{r}')$ – соответствующая функция Грина, а $d\Gamma$ – дифференциал, зависящий от размерности задачи.

В пределе для проводников с бесконечной проводимостью все заряды можно полагать сосредоточенными на поверхности проводников, поэтому объём

ёмную плотность заряда $\rho(\underline{r})$ можно заменить поверхностной плотностью заряда $\sigma(\underline{r})$. Для решения интегрального уравнения (2.2) формируется соответствующее скалярное произведение

$$\langle \varphi(\underline{r}), w(\underline{r}) \rangle = \iint G(\underline{r} | \underline{r}') \sigma(\underline{r}') w(\underline{r}) d\Gamma d\Gamma', \quad (2.3)$$

где $w(\underline{r})$ – весовая функция, которая при использовании согласования по точкам с помощью дельта функций Дирака, имеет вид $w(\underline{r}) = \delta(x-x_m)\delta(y-y_m)\delta(z-z_m)$ для трёхмерной задачи и $w(\underline{r}) = \delta(x-x_m)\delta(y-y_m)$ для двумерной задачи (когда система бесконечна в направлении z). Подстановка дельта функций вместо весовой функции в уравнение (2.3) представляет в следующем виде двумерную и трёхмерную задачи, соответственно,

$$\begin{aligned} \varphi(x_m, y_m) &= \iint_D \sigma(x', y') G(x_m, y_m | x', y') dx' dy'; \\ \varphi(x_m, y_m, z_m) &= \iiint_D \sigma(x', y', z') G(x_m, y_m, z_m | x', y', z') dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Трёхмерная задача

Рассмотрим задачу вычисления ёмкостной матрицы системы МПЛП конечной длины Z в многослойной диэлектрической среде, пример которой показан на рис. 2.1.

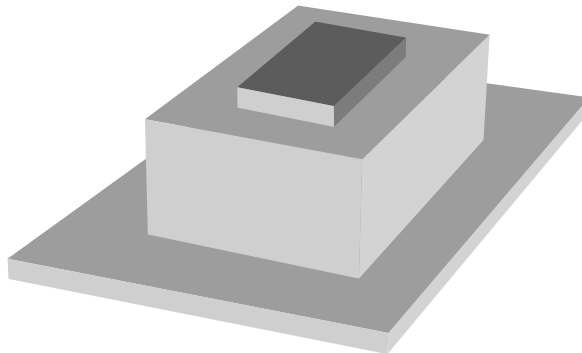


Рис. 2.1. Пример трёхмерной конфигурации (сверху вниз: проводник, диэлектрик, опорный проводник)

Для трёхмерной задачи ij -й элемент искомой ёмкостной матрицы равен свободному заряду на i -м проводнике, когда j -й проводник имеет потенциал один вольт, а все остальные – ноль вольт. В свою очередь, свободный заряд на проводнике равен интегралу свободного заряда единицы площади по всей поверхности этого проводника.

Согласно подходу, предложенному в работе [105], полагается, что общий заряд расположен на границах проводник-диэлектрик и на границах диэлектрик-диэлектрик. Заряд на границах проводник-диэлектрик состоит из свободного заряда и поляризационного заряда, а заряд на границах диэлектрик-диэлектрик состоит только из поляризационного заряда. Обозначим плотность этого заряда, расположенного на границах, за $\sigma(\underline{r})$, где \underline{r} – вектор координат положения границ в ортогональной системе координат (x, y, z) . Допустим, что над всеми границами произведена дискретизация, суть которой будет показана ниже. Пусть в результате дискретизации получилось всего N элементов, причём

N_c элементов на J_c границах проводник-диэлектрик и N_d элементов на J_d границах диэлектрик-диэлектрик, так что $J=J_c+J_d$ и $N=N_c+N_d$.

Потенциал $\varphi(\underline{r})$ в любой точке \underline{r} над плоскостью земли создаётся совокупностью зарядов, расположенных в точках \underline{r}' на всех границах S_j , и образов этих зарядов относительно бесконечной плоскости (если она есть), расположенных в точках $\hat{\underline{r}}'$.

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^J \int_{S_j} \sigma(\underline{r}') G(\underline{r} | \underline{r}') da'_j, \quad (2.4)$$

где S_j – площадь поверхности j -й границы; da'_j – дифференциальный элемент площади в точке \underline{r}' на S_j ;

$$G(\underline{r} | \underline{r}') = \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} - \frac{\text{iflg}}{|\underline{r} - \hat{\underline{r}}'|} \quad (2.5)$$

– функция Грина, где коэффициент iflg , введённый для записи обоих случаев в одном уравнении, здесь и далее равен единице, если есть бесконечная плоскость и равен нулю, если её нет.

Взятый с минусом градиент потенциала даёт вектор напряжённости электрического поля

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\varphi(\underline{r}). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) в (2.6) и полагая, что точка \underline{r} не находится ни на одной из границ $\{S_j\}$, так что оператор ∇ можно внести под знак интеграла, получаем

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^J \int_{S_j} \sigma(\underline{r}') \underline{H}(\underline{r} | \underline{r}') da'_j, \quad (2.7)$$

где

$$\underline{H}(\underline{r} | \underline{r}') = \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} - \text{iflg} \frac{\underline{r} - \hat{\underline{r}}'}{|\underline{r} - \hat{\underline{r}}'|^3}. \quad (2.8)$$

Когда точка \underline{r} находится на границе S_i , $i=1\dots J$, предел выражения (2.7) сводится к

$$\underline{E}^\pm(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^J \int_{S_j} \sigma(\underline{r}') \underline{H}(\underline{r} | \underline{r}') da'_j \pm \underline{n} \frac{\sigma(\underline{r})}{2\epsilon_0}, \quad (2.9)$$

где \underline{n} – здесь и далее, единичный вектор, нормальный к S_i в точке \underline{r} ; \underline{E}^+ и \underline{E}^- – здесь и далее, векторы напряжённости электрического поля, соответственно, на положительной (к которой указывает \underline{n}) и отрицательной (от которой указывает \underline{n}) сторонах S_i .

Потенциал на каждой границе проводник-диэлектрик полагается постоянным (устанавливается одному вольту или нулю согласно граничным условиям). Обозначая потенциал на i -й границе проводник-диэлектрик за V_i , для \underline{r} на S_i , $i=1\dots J_c$, получаем

$$\varphi(\underline{r}) = V_i. \quad (2.10)$$

Подстановка (2.4) в (2.10) даёт для \underline{r} на S_i , $i=1\dots J_c$, систему уравнений, соответствующих граничным условиям на границах проводник-диэлектрик

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^J \int_{S_j} \sigma(\underline{r}') G(\underline{r} | \underline{r}') da'_j = V_i. \quad (2.11)$$

Поскольку на каждой границе диэлектрик-диэлектрик нормальная составляющая вектора электрического смещения $\underline{D}(\underline{r})$, равного произведению диэлектрической проницаемости и вектора напряжённости электрического поля, является непрерывной, то для \underline{r} на $S_i, i=(Jc+1)\dots J$, получаем

$$\epsilon_i^+ \underline{E}^+(\underline{r}) \cdot \underline{n} = \epsilon_i^- \underline{E}^-(\underline{r}) \cdot \underline{n}, \quad (2.12)$$

где ϵ_i^+ и ϵ_i^- – диэлектрические проницаемости, соответственно, на положительной и отрицательной сторонах S_i . Подстановка (2.9) в (2.12), после деления обеих частей уравнения на $(\epsilon_i^+ - \epsilon_i^-)$, даёт систему уравнений, соответствующих граничным условиям на границах диэлектрик-диэлектрик для \underline{r} на $S_i, i=(Jc+1)\dots J$,

$$\frac{\epsilon_i^+ + \epsilon_i^-}{\epsilon_i^+ - \epsilon_i^-} \cdot \frac{\sigma(\underline{r})}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^J \int_{S_j} \sigma(\underline{r}') \underline{H}(\underline{r} | \underline{r}') \underline{n} da'_j = 0. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.11) и (2.13) являются системой J интегральных уравнений для неизвестной плотности общего заряда $\sigma(\underline{r})$, расположенного на участках $S_j, j=1\dots J$.

Теперь, поскольку для i -го участка проводника можно записать

$$\sigma(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) \underline{n}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_f(\underline{r}) = \epsilon(\underline{r}) \underline{E}(\underline{r}) \underline{n}, \quad (2.15)$$

где $\underline{E}(\underline{r})$ – вектор напряжённости электрического поля снаружи участка; \underline{n} – единичный вектор, нормальный к S_i в точке \underline{r} ; $\epsilon(\underline{r})$ – диэлектрическая проницаемость снаружи участка; $\sigma_f(\underline{r})$ – свободный заряд на единице площади проводника, то из уравнений (2.14) и (2.15) получаем

$$\sigma_f(\underline{r}) = \frac{\epsilon(\underline{r})}{\epsilon_0} \sigma(\underline{r}). \quad (2.16)$$

Наконец, из определения элемента ёмкостной матрицы получаем

$$C_{ij} = \int_{S_i} \frac{\epsilon(\underline{r})}{\epsilon_0} \sigma^{(j)}(\underline{r}) da_i, \quad (2.17)$$

где индекс i относится к проводнику, по поверхности которого производится интегрирование, а индекс j над плотностью заряда означает распределение плотности заряда, когда j -й проводник находился под потенциалом одного вольта, а все остальные – под потенциалом нуля.

Решение уравнений (2.11) и (2.13) для $\sigma(\underline{r})$ ищется методом моментов в виде

$$\sigma(\underline{r}) = \sum_{n=1}^N \sigma_n P_n(\underline{r}), \quad (2.18)$$

где $\{P_n(\underline{r}), n=1\dots N\}$ – функции разложения, такие что

$$P_n(\underline{r}) = \begin{cases} 1 & \text{для } \underline{r} \text{ на площадке } S_n; \\ 0 & \text{для других } \underline{r} \end{cases};$$

$\{\sigma_n, n=1\dots N\}$ – искомые константы. По существу, выбирается точка с номером m , такая, что в этой точке

$$P_m=1; P_n=0, n=1\dots(m-1), (m+1)\dots N,$$

а σ_m является постоянным множителем, определяющим плотность заряда на площадке с центром в этой точке m .

Подставляя (2.18) в (2.11) и задавая $r=r_m$ для $m=1\dots N_c$, получаем

$$\sum_{n=1}^N S_{mn} \sigma_n = V_i, m=1\dots N_c, \quad (2.19)$$

где индекс i обозначает, что каждый элемент дискретизации, принадлежащий проводнику i , находится под потенциалом, необходимым для определения ёмкостной матрицы.

Подставляя (2.18) в (2.13) и задавая $r=r_m$ для $m=(N_c+1)\dots N$, получаем

$$\sum_{n=1}^N S_{mn} \sigma_n = 0, m=(N_c+1)\dots N. \quad (2.20)$$

Вычисление элементов S_{mn} из систем уравнений (2.19) и (2.20) будет подробно рассмотрено в следующих разделах. Сейчас же, отметим, что в случае отсутствия бесконечной плоскости, не гарантируется равенство нулю общего свободного заряда всей системы. Поэтому, к системе N уравнений определяемых (2.19) и (2.20) должно быть добавлено ограничение, что сумма свободных зарядов должна быть равна нулю. В работе [95] это предлагается сделать с помощью системы уравнений

$$f(\sigma_n) = \left[\sum_{n=1}^{N_c} S_{mn} \sigma_n - V_i \right]^2 \rightarrow \min ;$$

$$g(\sigma_n) = \sum_{n=1}^{N_c} \sigma_n a_n \varepsilon_n = 0,$$

где ε_n – диэлектрическая проницаемость около n -го элемента дискретизации проводник-диэлектрик и a_n – площадь этого элемента. С помощью множителей Лагранжа Γ эта система приводится к виду

$$\frac{df(\sigma_n)}{d\sigma_n} + \Gamma \frac{dg(\sigma_n)}{d\sigma_n} = 0,$$

давая систему $N+1$ уравнений с $N+1$ неизвестными. Коэффициенты дополнительных уравнений, необходимых для трёхмерного случая без бесконечной плоскости земли, вычисляются по формулам

$$S_{nN+1} = \frac{a_n}{2S_{nn}}, n=1\dots N_1; \quad (2.21)$$

$$S_{N+1n} = a_n \varepsilon_n, n=1\dots N_1. \quad (2.22)$$

Таким образом, собранные воедино элементы S_{mn} дают квадратную матрицу \underline{S} , связывающую плотности заряда элементов дискретизации на проводниках и диэлектрических границах, составляющих вектор $\underline{\sigma}$, с потенциалами этих элементов, составляющих вектор \underline{V} , и задача окончательно представляется в виде матричного уравнения

$$\underline{S} \underline{\sigma} = \underline{V}. \quad (2.23)$$

Оно решается N_{cond} раз (N_{cond} – число проводников в системе, не считая опорного), причём в i -м решении, потенциал проводника V_i , $i=1 \dots N_{\text{cond}}$, равен единице, а потенциал всех остальных проводников равен нулю.

Двумерная задача

Рассмотрим систему МПДП в многослойной диэлектрической среде, показанную на рис. 2.2. Система однородна и бесконечна в направлении Z перпендикулярном странице, а её поперечное сечение лежит в XY плоскости страницы. Необходимо определить погонную ёмкостную матрицу системы.

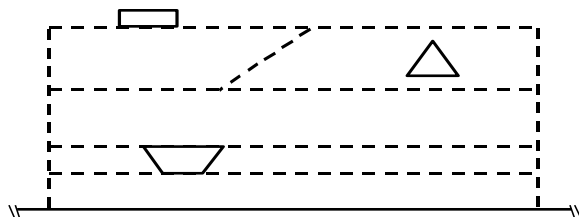


Рис. 2.2. Поперечное сечение двумерной системы МПДП

Для двумерной задачи ij -й элемент искомой ёмкостной матрицы равен свободному заряду единицы длины поверхности i -го проводника, когда j -й проводник имеет потенциал один вольт, а все остальные проводники имеют потенциал ноль вольт. В свою очередь, свободный заряд единицы длины поверхности проводника равен интегралу свободного заряда единицы площади по пересечению поверхности этого проводника с плоскостью XY .

Подход полностью аналогичен подходу, описанному для трёхмерной задачи. Отличия состоят в следующем. В формуле (2.4) для потенциала и в формуле (2.7) для напряжённости электрического поля интегрирование по поверхности заменяется интегрированием по линии. Функции Грина в формуле (2.4) и её производные в формуле (2.7) становятся следующими

$$G(\underline{r} | \underline{r}') = \frac{1}{2} (\ln |\underline{r} - \underline{r}'| - i\text{flg} \cdot \ln |\underline{r} - \hat{\underline{r}}'|); \quad (2.24)$$

$$\underline{H}(\underline{r} | \underline{r}') = \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{2|\underline{r} - \underline{r}'|^2} - i\text{flg} \frac{\underline{r} - \hat{\underline{r}}'}{2|\underline{r} - \hat{\underline{r}}'|^2}. \quad (2.25)$$

Как и в трёхмерной задаче, уравнения (2.11) и (2.13) образуют систему J интегральных уравнений для плотности заряда $\sigma(\underline{r})$, которая будет решена для двумерной задачи с уменьшенной размерностью интегрирования и соответствующей подстановкой двумерных функций (2.24)–(2.25). Метод решения этой двумерной задачи методом моментов идентичен описанному выше для трёхмерной задачи.

2.3.2 Дискретизация границ

Для решения интегральных уравнений (2.11) и (2.13) относительно плотности распределения заряда все границы проводник-диэлектрик и границы диэлектрик-диэлектрик аппроксимируются элементами дискретизации, а именно,

отрезками прямых линий (подынтервалами) для двумерной задачи и участками поверхности (подплощадками) для трёхмерной задачи. Отметим, что эти уравнения записаны в самом общем виде, позволяющем произвольную ориентацию подынтервалов и подплощадок обоих видов, а значит, произвольные поперечные сечения проводников и границ раздела диэлектриков для двумерной задачи и произвольные проводники и границы раздела диэлектриков для трёхмерной задачи. Для этого самого общего случая вычисление интегралов для определения элементов S_{mn} результирующей матрицы можно выполнить только численно, тогда как различные частные случаи ориентации элементов дискретизации позволяют аналитическое вычисление некоторых или даже всех интегралов. Рассмотрим сначала более простую задачу двумерной дискретизации, а затем – трёхмерной.

Двумерная дискретизация для границ произвольной ориентации

Пусть в поперечном сечении системы все границы имеют произвольную ориентацию. Для дискретизации такой конфигурации все границы кусочно-линейно делятся на подынтервалы, каждый из которых характеризуется величинами, значения которых приводятся ниже и поясняются на рис. 2.3.

x_n – X координата центра подынтервала n .

y_n – Y координата центра подынтервала n .

d_n – длина подынтервала n .

θ_n – угол, образуемый подынтервалом n с положительным направлением оси координат X.

ε_n – диэлектрическая проницаемость около n -го подынтервала проводник-диэлектрик.

ε_n^+ и ε_n^- – (далее используются только с индексом m) диэлектрические проницаемости, соответственно, на положительной (к которой указывает \underline{n}_n) и отрицательной (от которой указывает \underline{n}_n) сторонах n -го подынтервала диэлектрик-диэлектрик, где \underline{n}_n – (далее используется только с индексом m) единичный вектор, проведённый нормально от центра n -го подынтервала.

Примеры значений этих параметров показаны в рамках на рис. 2.3.

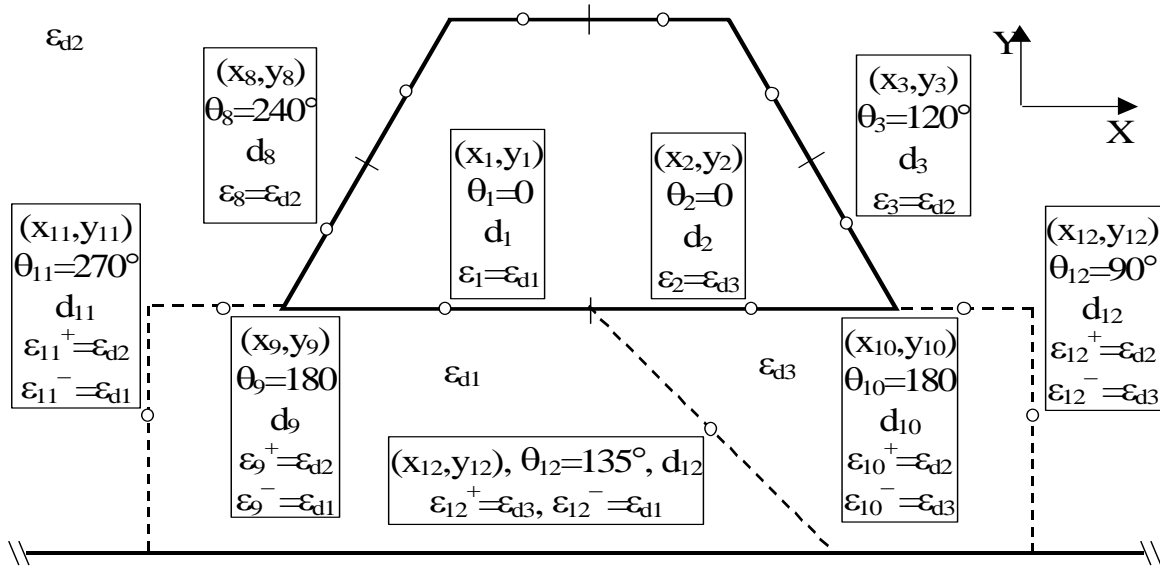


Рис. 2.3. Схема двумерной дискретизации

Центру подынтервала n соответствует вектор \underline{r}_n (далее используется только с индексом n), определяемый как

$$\underline{r}_n = \underline{x}x_n + \underline{y}y_n, \quad (2.26)$$

где \underline{x} и \underline{y} – единичные векторы в направлениях X и Y , соответственно. Аналогично, вектор \underline{r}'_n подынтервала, по которому ведётся интегрирование, и вектор $\hat{\underline{r}}'_n$ его образа относительно бесконечной плоскости определяются как

$$\underline{r}'_n = \underline{x}x'_n + \underline{y}y'_n; \quad (2.27)$$

$$\hat{\underline{r}}'_n = \underline{x}x'_n - \underline{y}y'_n, \quad (2.28)$$

где

$$x'_n = x_n + t \cos(\theta_n); \quad (2.29)$$

$$y'_n = y_n + t \sin(\theta_n), \quad (2.30)$$

где t текущее расстояние от центра (x_n, y_n) подынтервала вдоль этого подынтервала. Написанное выше можно рассматривать как переход (только при интегрировании по каждому подынтервалу) к полярной системе координат с радиусом t и углом θ с центром координат в центре (x_n, y_n) этого подынтервала. В результате, исходное интегрирование по двум декартовым координатам для текущей точки и её образа сводится к интегрированию по одной переменной t (поскольку угол $\theta=\theta_n=\text{const}$ для выбранного подынтервала).

Порядок дискретизации таков. Сначала дискретизируются границы проводник-диэлектрик и полученным подынтервалам проводник-диэлектрик присваиваются номера с 1 по N_c . Если есть бесконечная плоскость, то она не дискретизируется, поскольку её влияние учтено в соответствующей функции Грина. Если есть вторая бесконечная плоскость, то она ограничивается в точке, достаточно удалённой от проводников, дискретизируется как обычный проводник и полагается всегда под нулевым потенциалом. Если есть другие проводники, которые всегда находятся под нулевым потенциалом, то все они дискретизируются как обычные проводники. Затем, дискретизируются границы диэлек-

трик-диэлектрик, и полученным подынтервалам диэлектрик-диэлектрик присваиваются номера с $Nc+1$ по N .

Рассмотрим вычисление коэффициентов S_{mn} для двумерной задачи.

Для строк матрицы \underline{S} с номерами $m=1\dots Nc$, соответствующими подынтервалам проводник-диэлектрик, элементы S_{mn} из уравнения (2.19) с учётом (2.11) с (2.24) вычисляются по формуле

$$S_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} (\text{iflg} \cdot \hat{I}_{mn} - I_{mn}), \begin{cases} m = 1\dots Nc \\ n = 1\dots N \end{cases}, \quad (2.31)$$

где

$$I_{mn} = \int_{\ell_n} \ln |\underline{r}_m - \underline{r}'_n| d\ell'; \quad (2.32)$$

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\ell_n} \ln |\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n| d\ell'. \quad (2.33)$$

Для строк матрицы \underline{S} с номерами $m=(Nc+1)\dots N$, соответствующими подынтервалам диэлектрик-диэлектрик, элементы S_{mn} из уравнения (2.20) с учётом (2.13) с (2.25) вычисляются по формулам

$$S_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} (I_{mn} - \text{iflg} \cdot \hat{I}_{mn}), \begin{cases} m = (Nc+1)\dots N \\ n = 1\dots N \end{cases}, m \neq n; \quad (2.34)$$

$$S_{mm} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} (I_{mm} - \text{iflg} \cdot \hat{I}_{mm}) + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\epsilon_m^+ + \epsilon_m^-}{\epsilon_m^+ - \epsilon_m^-}, m = (Nc+1)\dots N, \quad (2.35)$$

где

$$I_{mn} = \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \underline{r}'_n}{|\underline{r}_m - \underline{r}'_n|^2} \underline{n}_m d\ell'; \quad (2.36)$$

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n}{|\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n|^2} \underline{n}_m d\ell'. \quad (2.37)$$

Следующим шагом является подстановка формул (2.26)–(2.30) в (2.31)–(2.37), которая будет рассмотрена ниже отдельно для подынтервалов проводник-диэлектрик и диэлектрик-диэлектрик.

Подынтервалы проводник-диэлектрик

Уравнение (2.31) для подынтервалов проводник-диэлектрик не изменяется, а (2.32) и (2.33) после подстановки формул (2.26)–(2.30) принимают вид

$$I_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \ln \left((x_m - (x_n + t \cos(\theta_n)))^2 + (y_m - (y_n + t \sin(\theta_n)))^2 \right) dt;$$

$$\hat{I}_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \ln \left((x_m - (x_n + t \cos(\theta_n)))^2 + (y_m + (y_n + t \sin(\theta_n)))^2 \right) dt.$$

Пара громоздких подлогарифмических выражений, важных для последующего анализа, после долгих преобразований приводится к виду удобному для интегрирования

$$\begin{aligned} (x_m - (x_n + t \cos(\theta_n)))^2 + (y_m + (y_n + t \sin(\theta_n)))^2 &= (t - b_1)^2 + a_1^2; \\ (x_m - (x_n + t \cos(\theta_n)))^2 + (y_m - (y_n + t \sin(\theta_n)))^2 &= (t - b_2)^2 + a_2^2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (x_m - x_n) \sin(\theta_n) + (y_m + y_n) \cos(\theta_n); \\ b_1 &= (x_m - x_n) \cos(\theta_n) - (y_m + y_n) \sin(\theta_n); \\ a_2 &= (x_m - x_n) \sin(\theta_n) - (y_m - y_n) \cos(\theta_n); \\ b_2 &= (x_m - x_n) \cos(\theta_n) + (y_m - y_n) \sin(\theta_n), \end{aligned} \quad (2.39)$$

позволяя привести (2.31) после преобразований к виду

$$S_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [\text{iflg} \cdot F_1(a_1, b_1) - F_1(a_2, b_2)], \begin{cases} m = 1 \dots Nc \\ n = 1 \dots N \end{cases}, \quad (2.40)$$

где

$$F_1(a, b) = \int_{-\frac{d_n - b}{2}}^{\frac{d_n - b}{2}} \ln(t^2 + a^2) dt.$$

Данный интеграл можно взять аналитически по формуле 1.6.7.3 [106], получив

$$F_1(a, b) = \left[t \cdot \ln(t^2 + a^2) - 2t + 2a \cdot \arctg\left(\frac{t}{a}\right) \right] \Bigg|_{-\frac{d_n - b}{2}}^{\frac{d_n - b}{2}}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} F_1(a, b) &= b \cdot \ln \left[\frac{(d_n + 2b)^2 + 4a^2}{(d_n - 2b)^2 + 4a^2} \right] + \\ &+ \frac{d_n}{2} \ln \left[\frac{1}{16} \left((d_n + 2b)^2 + 4a^2 \right) \left((d_n - 2b)^2 + 4a^2 \right) \right] - \\ &- 2d_n + 2a \left[\arctg\left(\frac{d_n - 2b}{2a}\right) + \arctg\left(\frac{d_n + 2b}{2a}\right) \right]. \end{aligned}$$

Как видно, получение окончательных формул для вычисления элементов S_{mn} для строк, соответствующих подынтервалам проводник-диэлектрик, пока не касалось ориентации подынтервалов диэлектрик-диэлектрик. Однако для получения окончательных формул для вычисления элементов S_{mn} для строк, соответствующих подынтервалам диэлектрик-диэлектрик, их ориентация весьма существенна. Поэтому далее, для ясности получения окончательных формул, рассмотрим в порядке нарастания сложности конфигурации три случая, когда есть подынтервалы диэлектрик-диэлектрик:

- только ортогональные оси Y;
- только ортогональные оси X и ортогональные оси Y;
- произвольной ориентации.

Подынтервалы диэлектрик-диэлектрик ортогональные оси Y

Пусть подынтервалы проводник-диэлектрик имеют произвольную ориентацию, а все подынтервалы диэлектрик-диэлектрик параллельны оси координат Y. Тогда формулы (2.34) и (2.35) не изменятся, а (2.36) и (2.37) (с учётом замены \underline{r}_m на \underline{y}) примут вид

$$I_{mn} = \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \underline{r}'_n}{|\underline{r}_m - \underline{r}'_n|^2} \underline{y} d\ell'; \quad \hat{I}_{mn} = \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n}{|\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n|^2} \underline{y} d\ell',$$

давая после подстановки формул (2.26)–(2.30)

$$I_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \left(\frac{y_m - (y_n + t \sin(\theta_n))}{(x_m - (x_n + t \cos(\theta_n)))^2 + (y_m - (y_n + t \sin(\theta_n)))^2} \right) dt ;$$

$$\hat{I}_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \left(\frac{y_m + (y_n + t \sin(\theta))}{(x_m - (x_n + t \cos(\theta)))^2 + (y_m + (y_n + t \sin(\theta)))^2} \right) dt ,$$

а после преобразований с учётом (2.38)

$$I_{mn} = (y_m - y_n - b_2 \sin(\theta_n)) F_2(a_2, b_2) - \sin(\theta_n) F_3(a_2, b_2); \quad (2.41)$$

$$\hat{I}_{mn} = (y_m + y_n + b_1 \sin(\theta_n)) F_2(a_1, b_1) - \sin(\theta_n) F_3(a_1, b_1), \quad (2.42)$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 определяются по (2.39), а

$$F_2(a, b) = \int_{-\frac{d_n-b}{2}}^{\frac{d_n-b}{2}} \frac{dt}{t^2 + a^2}; \quad F_3(a, b) = \int_{-\frac{d_n-b}{2}}^{\frac{d_n-b}{2}} \frac{t dt}{t^2 + a^2}$$

можно взять аналитически, получив окончательно

$$F_2(a, b) = \frac{4d_n}{4b^2 + d_n^2} \text{ при } a=0, \quad (2.43)$$

$$F_2(a, b) = \frac{1}{a} \left[\text{arctg}\left(\frac{d_n - 2b}{2a}\right) + \text{arctg}\left(\frac{d_n + 2b}{2a}\right) \right] \text{ при } a \neq 0; \quad (2.44)$$

$$F_3(a, b) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(d_n - 2b)^2 + 4a^2}{(d_n + 2b)^2 + 4a^2} \right). \quad (2.45)$$

Подынтервалы диэлектрик-диэлектрик ортогональные оси X

Пусть подынтервалы проводник-диэлектрик, как и прежде, имеют произвольную ориентацию, а кроме подынтервалов диэлектрик-диэлектрик ортогональных оси координат Y, есть подынтервалы диэлектрик-диэлектрик ортогональные оси X. Тогда сначала дискретизируются и последовательно нумеруются подынтервалы проводник-диэлектрик (номер последнего – Nc), затем – подынтервалы диэлектрик-диэлектрик ортогональные Y (номер последнего – Nd_Y), а затем – подынтервалы диэлектрик-диэлектрик ортогональные X (номер последнего – N).

Для подынтервалов диэлектрик-диэлектрик ортогональных оси X формулы (2.34) и (2.35) не изменятся, а (2.36) и (2.37) (с учётом замены \underline{p}_m на \underline{x}) примут вид

$$I_{mm} = \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \underline{r}'_n}{|\underline{r}_m - \underline{r}'_n|^2} \underline{x} d\ell'; \quad \hat{I}_{mm} = \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n}{|\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n|^2} \underline{x} d\ell',$$

давая после подстановки формул (2.26)–(2.30)

$$I_{mm} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \left(\frac{x_m - (x_n + t \cos(\theta_n))}{(x_m - (x_n + t \cos(\theta_n)))^2 + (y_m - (y_n + t \sin(\theta_n)))^2} \right) dt;$$

$$\hat{I}_{mm} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \left(\frac{x_m - (x_n + t \cos(\theta))}{(x_m - (x_n + t \cos(\theta)))^2 + (y_m + (y_n + t \sin(\theta)))^2} \right) dt,$$

а после преобразований, с учётом (2.38)

$$I_{mm} = (x_m - x_n - b_2 \cos(\theta_n)) F_2(a_2, b_2) - \cos(\theta_n) F_3(a_2, b_2); \quad (2.46)$$

$$\hat{I}_{mm} = (x_m - x_n - b_2 \cos(\theta_n)) F_2(a_1, b_1) - \cos(\theta_n) F_3(a_1, b_1), \quad (2.47)$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 определяются по (2.39), а $F_2(a, b)$ и $F_3(a, b)$ по (2.43)–(2.45).

В заключение подчеркнём, что в этом случае, в отличие от предыдущего, по полученным в предыдущем разделе формулам для подынтервалов диэлектрик-диэлектрик ортогональных оси Y вычисляются не все строки матрицы \underline{S} с номерами $m=(Nc+1)\dots N$, а только строки с номерами $m=(Nc+1)\dots Nd_Y$. Остальные же строки матрицы \underline{S} , с номерами $m=(Nd_Y+1)\dots N$, вычисляются по полученным в данном разделе формулам для подынтервалов диэлектрик-диэлектрик ортогональных оси X.

Подынтервалы диэлектрик-диэлектрик произвольной ориентации

Рассмотрим случай, когда границы диэлектрик-диэлектрик имеют произвольную ориентацию. Тогда дискретизируются и последовательно нумеруются Nc подынтервалов проводник-диэлектрик, затем – все остальные подынтервалы диэлектрик-диэлектрик.

Для подынтервалов диэлектрик-диэлектрик произвольной ориентации формулы (2.34) и (2.35) не изменятся, а (2.36) и (2.37) (с учётом замены \underline{p}_m на $\sin(\theta_m)\underline{x} - \cos(\theta_m)\underline{y}$), примут вид

$$I_{mm} = \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \underline{r}'_n}{|\underline{r}_m - \underline{r}'_n|^2} (\sin(\theta_m)\underline{x} - \cos(\theta_m)\underline{y}) d\ell';$$

$$\hat{I}_{mm} = \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n}{|\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n|^2} (\sin(\theta_m)\underline{x} - \cos(\theta_m)\underline{y}) d\ell',$$

давая после раскрытия скобок

$$I_{mm} = \sin(\theta_m) \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \underline{r}'_n}{|\underline{r}_m - \underline{r}'_n|^2} \underline{x} d\ell' - \cos(\theta_m) \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \underline{r}'_n}{|\underline{r}_m - \underline{r}'_n|^2} \underline{y} d\ell'$$

$$\hat{I}_{mn} = \sin(\theta_m) \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n}{|\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n|^2} \underline{x} d\ell' - \cos(\theta_m) \int_{\ell_n} \frac{\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n}{|\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n|^2} \underline{y} d\ell',$$

откуда ясно видно, что интегралы первого и второго слагаемых уже проанализированы в двух предыдущих разделах, соответственно, т.е.

$$I_{mn} = \sin(\theta_m) I_{mn}^{\perp X} - \cos(\theta_m) I_{mn}^{\perp Y},$$

$$\hat{I}_{mn} = \sin(\theta_m) \hat{I}_{mn}^{\perp X} - \cos(\theta_m) \hat{I}_{mn}^{\perp Y},$$

где $I_{mn}^{\perp X}$, $\hat{I}_{mn}^{\perp X}$, $I_{mn}^{\perp Y}$, $\hat{I}_{mn}^{\perp Y}$ вычисляются по формулам (2.41), (2.42), (2.46), (2.47), соответственно.

Двумерная дискретизация для границ ортогональной ориентации

Отметим, что рассмотренный в предыдущем разделе случай подынтервалов произвольного наклона θ приводит к появлению тригонометрических функций $\sin(\theta)$ и $\cos(\theta)$, существенно усложняющих вывод формул, их окончательный вид и вычисления по этим формулам. Между тем, очень распространён случай, когда реальный наклон границ системы можно полагать только ортогональным оси Y или оси X , например, при прямоугольном поперечном сечении проводников и диэлектрических вставок, слоистом диэлектрике. Вывод формул для этого частного случая существенно упрощается по двум причинам. Во-первых, исчезают все $\sin(\theta)$ и $\cos(\theta)$, т.к. все θ становятся кратными $\pi/2$. Во-вторых, при интегрировании по подынтервалу изменяется лишь одна декартова координата, тогда как вторая при этом остаётся константой. Очевидно, что для реализации этих преимуществ вывод формул для вычисления элементов матрицы должен быть рассмотрен отдельно для каждой ориентации подынтервалов.

Итак, все границы раздела поперечного сечения дискретизируются подынтервалами, каждый из которых ортогонален оси Y или X (что для краткости записи обозначается далее $\perp Y$ или $\perp X$). Сначала дискретизируются и последовательно нумеруются подынтервалы проводник-диэлектрик ортогональные Y (номер последнего – N_{cY}), затем – подынтервалы проводник-диэлектрик ортогональные X (номер последнего – N_c), затем – подынтервалы диэлектрик-диэлектрик ортогональные Y (номер последнего – N_{dY}), а затем – подынтервалы диэлектрик-диэлектрик ортогональные X (номер последнего – N).

Каждый подынтервал описывается следующими параметрами:

x_n – координата X центра подынтервала n ;

y_n – координата Y центра подынтервала n ;

d_n – длина подынтервала n ;

ε_n – диэлектрическая проницаемость около n -го подынтервала проводник-диэлектрик;

ε_n^+ и ε_n^- – (далее используются только с индексом m) диэлектрические проницаемости, соответственно, на положительной (к которой указывает \underline{n}_n) и отрицательной (от которой указывает \underline{n}_n) сторонах n -го подынтервала диэлектрик-диэлектрик, где \underline{n}_n – (далее используется только с индексом m) единичный вектор, проведённый нормально от центра n -го подынтервала.

Центру подынтервала n соответствует вектор \underline{r}_n (далее используется только с индексом m), определяемый как

$$\underline{r}_n = \underline{x}x_n + \underline{y}y_n, \quad (2.48)$$

где \underline{x} , \underline{y} – единичные векторы в направлениях X , Y , соответственно. Аналогично, вектор \underline{r}'_n центра подынтервала, по которому ведётся интегрирование, и вектор $\hat{\underline{r}}'_n$ его образа относительно бесконечной плоскости земли определяются как

$$\underline{r}'_n = \underline{x}x'_n + \underline{y}y'_n; \quad (2.49)$$

$$\hat{\underline{r}}'_n = \underline{x}x'_n - \underline{y}y'_n, \quad (2.50)$$

где

$$x'_n = x_n + t_1, \quad y'_n = y_n + t_2 \quad (2.51)$$

и t_1 , t_2 – текущие расстояния от центра (x_n, y_n) подынтервала по координатам X , Y , соответственно.

Подынтервалы проводник-диэлектрик

Уравнение (2.31) для подынтервалов проводник-диэлектрик не изменяется, а (2.32) и (2.33) необходимо рассмотреть отдельно для каждой ориентации подынтервалов ℓ_n .

Для подынтервалов $\ell_n \perp Y$ ($n=1 \dots Nc_Y, (Nc+1) \dots Nd_Y$) дифференциал $d\ell' = dt_1$ и формулы (2.51) принимают вид

$$x'_n = x_n + t_1, \quad y'_n = y_n. \quad (2.52)$$

Интеграл I_{mn} в (2.32) после подстановки (2.48) и (2.49) с учётом (2.52) получается таким

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \ln \left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m - y_n)^2 \right] dt_1,$$

а после замены переменной

$$t_1 - (x_m - x_n) = \Gamma_1 \quad (2.53)$$

принимает вид

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_{a_2}^{a_1} \ln(\Gamma_1^2 + c_1^2) d\Gamma_1, \quad (2.54)$$

где

$$a_1 = \frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); a_2 = -\frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); c_1 = y_m - y_n. \quad (2.55)$$

Интеграл в (2.54) можно взять аналитически по формуле 1.6.7.3 [106], получив окончательно

$$I_{mn} = a_1 \cdot \ln(a_1^2 + c_1^2) - 2a_1 + 2c_1 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{a_1}{c_1}\right) -$$

$$-a_2 \cdot \ln(a_2^2 + c_1^2) + 2a_2 - 2c_1 \cdot \arctg\left(\frac{a_2}{c_1}\right). \quad (2.56)$$

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.33) после подстановки (2.48) и (2.50) с учётом (2.52) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \ln[(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m + y_n)^2] dt_1,$$

а после замены переменной (2.53) принимает вид

$$\hat{I}_{mn} = \frac{1}{2} \int_{a_2}^{a_1} \ln(\Gamma_1^2 + c_2^2) d\Gamma_1, \quad (2.57)$$

где

$$a_1 = \frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); a_2 = -\frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); c_2 = y_m + y_n. \quad (2.58)$$

Как видно, (2.57) совпадает по виду с (2.54), поэтому \hat{I}_{mn} можно вычислить по (2.56) после замены c_1 на c_2 , и подставляя (2.58).

Для подынтервалов $\ell_n \perp X$ ($n=Nc_Y \dots Nc_x, (Nd_Y+1) \dots N$) дифференциал $d\ell' = dt_2$ и формулы (2.51) принимают вид

$$x'_n = x_n, \quad y'_n = y_n + t_2. \quad (2.59)$$

Интеграл I_{mn} в (2.32) после подстановки (2.48) и (2.49) с учётом (2.59) получается таким

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \ln[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2] dt_2,$$

а после замены переменной

$$t_2 - (y_m - y_n) = \Gamma_1 \quad (2.60)$$

принимает вид

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_{a_2}^{a_1} \ln(\Gamma_1^2 + c_1^2) d\Gamma_1, \quad (2.61)$$

где

$$a_1 = \frac{d_n}{2} - (y_m - y_n); a_2 = -\frac{d_n}{2} - (y_m - y_n); c_1 = x_m - x_n. \quad (2.62)$$

Как видно (2.61) совпадает с (2.54), а значит, I_{mn} вычисляется по (2.56), подставляя (2.62).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.33) после подстановки (2.48) и (2.50) с учётом (2.59) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \ln \left[(x_m - x_n)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2 \right] dt_2, \quad (2.63)$$

а после замены переменной

$$t_2 + (y_m + y_n) = \Gamma_1 \quad (2.64)$$

совпадает с (2.57), где

$$a_1 = \frac{d_n}{2} + (y_m + y_n); a_2 = -\frac{d_n}{2} + (y_m + y_n); c_2 = x_m - x_n, \quad (2.65)$$

поэтому \hat{I}_{mn} можно вычислить по (2.56) после замены c_1 на c_2 , и подставляя (2.65).

Подынтервалы диэлектрик-диэлектрик

Формулы (2.34) и (2.35) для подынтервалов диэлектрик-диэлектрик не изменятся, а (2.36) и (2.37) необходимо рассмотреть по отдельности, сначала для вычисления строк матрицы \underline{S} с номерами $m=(Nc+1)\dots Nd_Y$, соответствующими подынтервалам диэлектрик-диэлектрик $\perp Y$, а затем – с номерами $m=(Nd_Y+1)\dots N$, соответствующими подынтервалам диэлектрик-диэлектрик $\perp X$.

Подынтервалы диэлектрик-диэлектрик $\perp Y$

Рассмотрим вычисление строк матрицы \underline{S} с номерами $m=(Nc+1)\dots Nd_Y$, соответствующими подынтервалам диэлектрик-диэлектрик $\perp Y$. Для этого случая, $\underline{p}_m = \underline{y}$, поэтому в числителях выражений (2.36) и (2.37), которые предстоит оценить, аналогично предыдущему разделу поочередно интегрируя по подынтервалам $\perp Y$ и $\perp X$, останутся только Y -координаты.

Для подынтервалов $\ell_n \perp Y$ ($n=1\dots Nc_Y, (Nc+1)\dots Nd_Y$) интеграл I_{mn} в (2.36) после подстановки (2.48) и (2.49) с учётом (2.52) получается таким

$$I_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \frac{y_m - y_n}{(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m - y_n)^2} dt_1,$$

а после замены переменной (2.53) принимает вид

$$I_{mn} = \int_{a_2}^{a_1} \frac{c_1}{\Gamma_1^2 + c_1^2} d\Gamma_1, \quad (2.66)$$

где константы совпадают с (2.55).

Интеграл по $d\Gamma_1$ стандартный и берётся аналитически, давая окончательную формулу

$$I_{mn} = \operatorname{arctg} \frac{a_1}{c_1} - \operatorname{arctg} \frac{a_2}{c_1}. \quad (2.67)$$

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.37) после подстановки (2.48) и (2.50) с учётом (2.52) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \frac{y_m + y_n}{(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m + y_n)^2} dt_1,$$

а после замены переменной (2.53) принимает вид

$$\hat{I}_{mn} = \int_{a_2}^{a_1} \frac{c_2}{\Gamma_1^2 + c_2^2} d\Gamma_1, \quad (2.68)$$

где константы совпадают с (2.58). Как видно, (2.68) совпадает по виду с (2.66), поэтому \hat{I}_{mn} можно вычислить по (2.67) после замены c_1 на c_2 , и подставляя (2.58).

Для подынтервалов $\ell_n \perp X$ ($n=Nc_Y \dots Nc_Y(Nd_Y+1) \dots N$) интеграл I_{mn} в (2.36) после подстановки (2.48) и (2.49) с учётом (2.59) получается таким

$$I_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \frac{y_m - y_n - t_2}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2} dt_2,$$

а после замены переменной (2.60) принимает вид

$$I_{mn} = \int_{a_2}^{a_1} \frac{-\Gamma_1}{\Gamma_1^2 + c_1^2} d\Gamma_1, \quad (2.69)$$

где константы совпадают с (2.62). Интеграл в (2.69) можно взять аналитически по формуле 1.2.10.17 [106], получив окончательно

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a_2^2 + c_1^2}{a_1^2 + c_1^2} \right). \quad (2.70)$$

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.37) после подстановки (2.48) и (2.50) с учётом (2.59) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \frac{y_m + y_n + t_2}{(x_m - x_n)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2} dt_2,$$

а после замены переменной (2.64) принимает вид

$$\hat{I}_{mn} = \int_{a_2}^{a_1} \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1^2 + c_2^2} d\Gamma_1, \quad (2.71)$$

где константы совпадают с (2.65), и вычисляется по окончательной формуле

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a_1^2 + c_2^2}{a_2^2 + c_2^2} \right). \quad (2.72)$$

Подынтервалы диэлектрик-диэлектрик $\perp X$

Рассмотрим вычисление строк матрицы \underline{S} с номерами $m=(Nd_Y+1) \dots N$, соответствующими подынтервалам диэлектрик-диэлектрик $\perp X$. Для этого случая, $\underline{\rho}_m = \underline{x}$, поэтому в числителях выражений (2.36) и (2.37), которые предстоит оце-

нить, аналогично предыдущему разделу поочерёдно интегрируя по подынтервалам $\perp Y$ и $\perp X$, останутся только X-координаты.

Для подынтервалов $\ell_n \perp Y$ ($n=1 \dots Nc_Y, (Nc+1) \dots Nd_Y$) интеграл I_{mn} в (2.36) после подстановки (2.48) и (2.49) с учётом (2.52) получается таким

$$I_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \frac{x_m - x_n - t_1}{(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m - y_n)^2} dt_1,$$

а после замены переменной (2.53) совпадает с (2.69) с константами (2.55), а значит, может вычисляться по (2.70).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.37) после подстановки (2.48) и (2.50) с учётом (2.52) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \frac{x_m - x_n - t_1}{(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m + y_n)^2} dt_1,$$

а после замены переменной (2.53) принимает вид

$$\hat{I}_{mn} = \int_{a_2}^{a_1} \frac{-\Gamma_1}{\Gamma_1^2 + c_2^2} d\Gamma_1, \quad (2.73)$$

где константы совпадают с (2.58), и может вычисляться по (2.70) после замены c_1 на c_2 , и подставляя (2.58).

Для подынтервалов $\ell_n \perp X$ ($n=Nc_Y \dots Nc, (Nd_Y+1) \dots N$) интеграл I_{mn} в (2.36) после подстановки (2.48) и (2.49) с учётом (2.59) получается таким

$$I_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \frac{x_m - x_n}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2} dt_2,$$

а после замены переменной (2.60) совпадает с (2.66), где константы совпадают с (2.62), а значит, может быть вычислен по (2.67).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.37) после подстановки (2.48) и (2.50) с учётом (2.59) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{-\frac{d_n}{2}}^{\frac{d_n}{2}} \frac{x_m - x_n}{(x_m - x_n)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2} dt_2,$$

а после замены переменной (2.64) совпадает с (2.68), где константы совпадают с (2.65), а значит, может быть вычислен по (2.67), подставляя c_2 вместо c_1 и (2.65).

Трёхмерная дискретизация для границ ортогональной ориентации

Очевидно, что поочерёдное интегрирование по подынтервалам каждой ортогональной ориентации применимо не только к двумерной, но и к трёхмерной задаче. Действительно, пусть все границы раздела проводник-диэлектрик и ди-

электрик-диэлектрик трёхмерной конфигурации дискретизируются на прямоугольные участки поверхности (подплощадки) ортогональные одной из трёх осей X, Y, Z . Таким образом, каждая подплощадка полностью описывается следующими параметрами:

x_n – координата X центра подплощадки n ;

y_n – координата Y центра подплощадки n ;

z_n – координата Z центра подплощадки n ;

Dx_n – размер по X подплощадки n ;

Dy_n – размер по Y подплощадки n ;

Dz_n – размер по Z подплощадки n ;

a_n – площадь подплощадки n , образованная соответствующим произведением $Dx_n \cdot Dz_n, Dx_n \cdot Dy_n, Dz_n \cdot Dy_n$;

ε_n – диэлектрическая проницаемость около n -й подплощадки проводник-диэлектрик;

ε_n^+ и ε_n^- – (далее используются только с индексом m) диэлектрические проницаемости, соответственно, на положительной (к которой указывает \underline{n}) и отрицательной (от которой указывает \underline{n}) сторонах n -й подплощадки диэлектрик-диэлектрик, где \underline{n} – (далее используется только с индексом m) единичный вектор, проведённый нормально от центра n -й подплощадки.

Центру подплощадки n соответствует вектор \underline{r}_n (далее используется только с индексом m), определяемый как

$$\underline{r}_n = \underline{x}x_n + \underline{y}y_n + \underline{z}z_n, \quad (2.74)$$

где $\underline{x}, \underline{y}$ и \underline{z} – единичные векторы в направлениях X, Y и Z , соответственно. Аналогично, вектор \underline{r}'_n центра подплощадки, по которой ведётся интегрирование, и вектор $\hat{\underline{r}}'_n$ его образа относительно бесконечной плоскости земли определяются как

$$\underline{r}'_n = \underline{x}x'_n + \underline{y}y'_n + \underline{z}z'_n; \quad (2.75)$$

$$\hat{\underline{r}}'_n = \underline{x}x'_n - \underline{y}y'_n + \underline{z}z'_n, \quad (2.76)$$

где

$$x'_n = x_n + t_1, \quad y'_n = y_n + t_2, \quad z'_n = z_n + t_3. \quad (2.77)$$

и t_1, t_2, t_3 , – расстояния от центра (x_n, y_n, z_n) подплощадки по координатам X, Y и Z , соответственно.

Порядок дискретизации таков, что сначала дискретизируются и последовательно нумеруются подплощадки проводник-диэлектрик ортогональные Y (номер последней – Nc_Y), затем – подплощадки проводник-диэлектрик ортогональные Z (номер последней – Nc_Z), затем – подплощадки диэлектрик-диэлектрик ортогональные X (номер последней – Nc), затем – подплощадки диэлектрик-диэлектрик ортогональные Y (номер последней – Nd_Y), затем – подплощадки диэлектрик-диэлектрик ортогональные Z (номер последней – Nd_Z) и, наконец, – подплощадки диэлектрик-диэлектрик ортогональные X (номер последней – N). В остальном, порядок дискретизации полностью аналогичен двумерной задаче. Рассмотрим вычисление коэффициентов S_{mn} для трёхмерной задачи.

Для строк матрицы \underline{S} с номерами $m=1\dots N_c$, соответствующими подплощадкам проводник-диэлектрик, элементы S_{mn} из уравнения (2.19) с учётом (2.11) с (2.5) вычисляются по формуле

$$S_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (I_{mn} - iflg \cdot \hat{I}_{mn}), \begin{cases} m = 1\dots N_c \\ n = 1\dots N \end{cases}, \quad (2.78)$$

где

$$I_{mn} = \int_{S_n} \frac{da'}{|\underline{r}_m - \underline{r}'_n|}; \quad (2.79)$$

$$\hat{I}_{mn} = \int_{S_n} \frac{da'}{|\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n|}. \quad (2.80)$$

Для строк матрицы \underline{S} с номерами $m=(N_c+1)\dots N$, соответствующими подынтервалам проводник-диэлектрик, элементы S_{mn} из уравнения (2.20) с учётом (2.13) с (2.8) вычисляются по формулам

$$S_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (I_{mn} - iflg \cdot \hat{I}_{mn}), \begin{cases} m = (N_c+1)\dots N \\ n = 1\dots N \end{cases}, m \neq n; \quad (2.81)$$

$$S_{mm} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (I_{mm} - \hat{I}_{mm}) + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\epsilon_m^+ + \epsilon_m^-}{\epsilon_m^+ - \epsilon_m^-}, m = (N_c+1)\dots N, \quad (2.82)$$

где

$$I_{mn} = \int_{S_n} \frac{\underline{r}_m - \underline{r}'_n}{|\underline{r}_m - \underline{r}'_n|^3} \underline{n}_m da'; \quad (2.83)$$

$$\hat{I}_{mn} = \int_{S_n} \frac{\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n}{|\underline{r}_m - \hat{\underline{r}}'_n|^3} \underline{n}_m da'; \quad (2.84)$$

ϵ_m^+ и ϵ_m^- – диэлектрические проницаемости, соответственно, на положительной (к которой указывает \underline{n}_m) и отрицательной (от которой указывает \underline{n}_m) сторонах m -й подплощадки;

\underline{n}_m – единичный вектор, проведённый нормально от центра m -й подплощадки.

Следующим шагом является подстановка формул (2.74)–(2.76) с учётом (2.77) в выражения (2.78)–(2.84). Вывод окончательных формул придётся рассмотреть отдельно три раза в зависимости от ориентации подплощадки S_n : $\perp Y$, $\perp Z$, $\perp X$.

Подплощадки проводник-диэлектрик

Уравнение (2.78) для подынтервалов проводник-диэлектрик не изменяется, а (2.79) и (2.80) необходимо рассмотреть отдельно для каждой ориентации подплощадок S_n .

Для подплощадок $S_n \perp Y$ ($n=1\dots N_{cY}, (N_c+1)\dots N_{dY}$) дифференциал $da' = dt_1 \cdot dt_3$ и формулы (2.77) принимают вид

$$x'_n = x_n + t_1, y'_n = y_n, z'_n = z_n + t_3. \quad (2.85)$$

Интеграл I_{mn} в (2.79) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.85) получается таким

$$I_{mm} = \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} dt_3 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{dt_1}{\sqrt{(x_m - x_n - t_1)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 + (y_m - y_n)^2}},$$

а после замены переменных

$$\begin{aligned} t_1 - (x_m - x_n) &= \Gamma_1; \\ t_3 - (z_m - z_n) &= \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.86)$$

принимает вид

$$I_{mm} = \int_{b_2}^{b_1} d\Gamma_2 \int_{a_2}^{a_1} \frac{d\Gamma_1}{\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + c_1^2}}, \quad (2.87)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{Dx_n}{2} - (x_m - x_n); a_2 = \frac{-Dx_n}{2} - (x_m - x_n); \\ b_1 &= \frac{Dz_n}{2} - (z_m - z_n); b_2 = \frac{-Dz_n}{2} - (z_m - z_n); c_1 = y_m - y_n. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Интеграл по $d\Gamma_1$ в (2.87) стандартный

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}), \quad a \neq 0, \quad (2.89)$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} I_{mm} &= \int_{b_2}^{b_1} \ln(a_1 + \sqrt{a_1^2 + c_1^2 + \Gamma_2^2}) d\Gamma_2 - \\ &- \int_{b_2}^{b_1} \ln(a_2 + \sqrt{a_2^2 + c_1^2 + \Gamma_2^2}) d\Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Интеграл по $d\Gamma_2$ в (2.90) после долгих преобразований берётся аналитически

$$\begin{aligned} \int \ln(a + \sqrt{a^2 + c^2 + x^2}) dx &= x \ln(a + \sqrt{a^2 + c^2 + x^2}) + \\ &+ a \ln(x + \sqrt{a^2 + c^2 + x^2}) - x + 2c \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x + a + \sqrt{a^2 + c^2 + x^2}}{c} \right), \end{aligned} \quad (2.91)$$

давая громоздкое, но окончательное аналитическое выражение для I_{mm}

$$\begin{aligned} I_{mm} &= 2c_1 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{b_1 + a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{c_1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{b_1 + a_2 + \sqrt{a_2^2 + b_1^2 + c_1^2}}{c_1} \right) - \right. \\ &- \operatorname{arctg} \left(\frac{b_2 + a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + c_1^2}}{c_1} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{b_2 + a_2 + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_1^2}}{c_1} \right) \left. \right] + \\ &+ a_1 \ln \left(\frac{b_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{b_2 + \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right) - a_2 \ln \left(\frac{b_1 + \sqrt{a_2^2 + b_1^2 + c_1^2}}{b_2 + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right) + \end{aligned}$$

$$+ b_1 \ln \left(\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{a_2 + \sqrt{a_2^2 + b_1^2 + c_1^2}} \right) - b_2 \ln \left(\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + c_1^2}}{a_2 + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right). \quad (2.92)$$

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.80) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.85) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} dt_3 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{dt_1}{\sqrt{(x_m - x_n - t_1)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 + (y_m + y_n)^2}},$$

а после замены переменных

$$t_1 - (x_m - x_n) = \Gamma_1; t_3 - (z_m - z_n) = \Gamma_2 \quad (2.93)$$

принимает вид

$$\hat{I}_{mn} = \int_{d_2}^{d_1} d\Gamma_2 \int_{a_2}^{a_1} \frac{d\Gamma_1}{\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + c_2^2}}, \quad (2.94)$$

где

$$a_1 = \frac{Dx_n}{2} - (x_m - x_n); a_2 = \frac{-Dx_n}{2} - (x_m - x_n); \quad (2.95)$$

$$d_1 = \frac{Dz_n}{2} - (z_m - z_n); d_2 = \frac{-Dz_n}{2} - (z_m - z_n); c_2 = y_m + y_n.$$

Как видно, (2.94) имеет вид (2.87), поэтому \hat{I}_{mn} можно вычислить по (2.92) для I_{mn} , заменив c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 и подставляя (2.95).

Для подплощадок $S_n \perp Z$ ($n=(Nc_Y+1) \dots Nc_Z, (Nd_Y+1) \dots Nd_Z$) дифференциал $da' = dt_1 \cdot dt_2$ и формулы (2.77) принимают вид

$$x'_n = x_n + t_1, y'_n = y_n + t_2, z'_n = z_n. \quad (2.96)$$

Интеграл I_{mn} в (2.79) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.96) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{dt_1}{\sqrt{(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2 + (z_m - z_n)^2}}$$

и после замены переменных

$$t_1 - (x_m - x_n) = \Gamma_1; t_2 - (y_m - y_n) = \Gamma_2 \quad (2.97)$$

совпадает с (2.87) где

$$a_1 = \frac{Dx_n}{2} - (x_m - x_n); a_2 = \frac{-Dx_n}{2} - (x_m - x_n); \quad (2.98)$$

$$b_1 = \frac{Dy_n}{2} - (y_m - y_n); b_2 = \frac{-Dy_n}{2} - (y_m - y_n); c_1 = z_m - z_n.$$

Очевидно, I_{mn} можно вычислить по формуле (2.92), но подставляя (2.98).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.80) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.96) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{dt_1}{\sqrt{(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2 + (z_m - z_n)^2}}$$

и после замены переменных

$$t_1 - (x_m - x_n) = \Gamma_1; t_2 + (y_m + y_n) = \Gamma_2 \quad (2.99)$$

совпадает с (2.94), где

$$a_1 = \frac{Dx_n}{2} - (x_m - x_n); a_2 = \frac{-Dx_n}{2} - (x_m - x_n); \quad (2.100)$$

$$d_1 = \frac{Dy_n}{2} + (y_m + y_n); d_2 = \frac{-Dy_n}{2} + (y_m + y_n); c_2 = z_m - z_n.$$

Очевидно, \hat{I}_{mn} можно вычислить по (2.92) для I_{mn} , заменив c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 , но подставляя (2.100).

Для подплощадок $S_n \perp X$ ($n=(Nc_Z+1)\dots Nc, (Nd_Z+1)\dots N$) дифференциал $da' = dt_2 \cdot dt_3$ и формулы (2.77) принимают вид

$$x'_n = x_n, y'_n = y_n + t_2, z'_n = z_n + t_3. \quad (2.101)$$

Интеграл I_{mn} в (2.79) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.101) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} \frac{dt_3}{\sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2}}$$

и после замены переменных

$$t_3 - (z_m - z_n) = \Gamma_1; t_2 - (y_m - y_n) = \Gamma_2 \quad (2.102)$$

совпадает с (2.87) где

$$a_1 = \frac{Dz_n}{2} - (z_m - z_n); a_2 = \frac{-Dz_n}{2} - (z_m - z_n); \quad (2.103)$$

$$b_1 = \frac{Dy_n}{2} - (y_m - y_n); b_2 = \frac{-Dy_n}{2} - (y_m - y_n); c_1 = x_m - x_n.$$

Очевидно, I_{mn} можно вычислить по формуле (2.92), но подставляя (2.103).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.80) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.101) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} \frac{dt_3}{\sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2}}$$

и после замены переменных

$$t_3 - (z_m - z_n) = \Gamma_1; t_2 + (y_m + y_n) = \Gamma_2 \quad (2.104)$$

совпадает с (2.94), где

$$a_1 = \frac{Dz_n}{2} - (z_m - z_n); a_2 = \frac{-Dz_n}{2} - (z_m - z_n);$$

$$d_1 = \frac{Dy_n}{2} + (y_m + y_n); d_2 = \frac{-Dy_n}{2} + (y_m + y_n); c_2 = x_m - x_n.$$
(2.105)

Очевидно, \hat{I}_{mn} можно вычислить по (2.92) для I_{mn} , заменив c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 , но подставляя (2.105).

Подплощадки диэлектрик-диэлектрик

Вывод формул для подплощадок диэлектрик-диэлектрик полностью аналогичен случаю для подплощадок проводник-диэлектрик. Забегая вперёд, укажем, что формулы для подстановок и констант $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ в интегралах получаются точно такими же, как в случае для подплощадок S_n проводник-диэлектрик соответствующей ориентации. Поэтому, во избежание повтора формул, далее указываются лишь ссылки на них.

Необходимо рассмотреть по отдельности, сначала вычисление строк матрицы \underline{S} с номерами $m=(N_1+1)\dots N_Y$, соответствующими подплощадкам диэлектрик-диэлектрик $\perp Y$, затем – с номерами $m=(N_Y+1)\dots N_Z$, соответствующими подплощадкам диэлектрик-диэлектрик $\perp Z$, и, наконец, – с номерами $m=(N_Z+1)\dots N$, соответствующими подплощадкам диэлектрик-диэлектрик $\perp X$.

Подплощадки диэлектрик-диэлектрик $\perp Y$

Рассмотрим вычисление строк матрицы \underline{S} с номерами $m=(N_1+1)\dots N_Y$, соответствующими подынтервалам диэлектрик-диэлектрик $\perp Y$. Для этого случая, $\underline{p}_m = \underline{y}$, поэтому в числителях выражений (2.83) и (2.84) (которые предстоит оценить, аналогично предыдущему разделу поочерёдно интегрируя по подынтервалам $\perp Y, \perp Z$ и $\perp X$) останутся только Y -координаты.

Для подплощадок $S_n \perp Y$ ($n=1\dots N_{c_Y}, (N_{c_Y}+1)\dots N_{d_Y}$) интеграл I_{mn} в (2.83) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.85) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} dt_3 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(y_m - y_n) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.86) принимает вид

$$I_{mn} = \int_{b_2}^{b_1} d\Gamma_2 \int_{a_2}^{a_1} \frac{c_1 d\Gamma_1}{\left[\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + c_1^2 \right]^{\frac{3}{2}}},$$
(2.106)

где остальные константы определяются (2.88).

Интеграл по $d\Gamma_1$ в (2.106) берётся по формуле 1.2.43.17 [106]

$$\int \frac{dx}{\left[x^2 + a^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$
(2.107)

откуда получаем

$$I_{mn} = \int_{b_2}^{b_1} \frac{c_1 a_1 d\Gamma_2}{(\Gamma_2^2 + c_1^2) \sqrt{\Gamma_2^2 + c_1^2 + a_1^2}} - \int_{b_2}^{b_1} \frac{c_1 a_2 d\Gamma_2}{(\Gamma_2^2 + c_1^2) \sqrt{\Gamma_2^2 + c_1^2 + a_2^2}}. \quad (2.108)$$

Интеграл по $d\Gamma_2$ в (2.108) можно взять по формуле 1.2.45.11 [106]

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b^2) \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{b \sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x \sqrt{a^2 - b^2}}{b \sqrt{x^2 + a^2}} \right), \quad a^2 > b^2, \quad (2.109)$$

откуда получаем окончательное аналитическое выражение для I_{mn}

$$I_{mn} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{a_1 b_1}{c_1 \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{a_1 b_2}{c_1 \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right) - \\ - \operatorname{arctg} \left(\frac{a_2 b_1}{c_1 \sqrt{a_2^2 + b_1^2 + c_1^2}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{a_2 b_2}{c_1 \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right), & \begin{cases} c_1 \neq 0, \\ a_1 \neq 0, \\ a_2 \neq 0; \end{cases} \\ - \operatorname{arctg} \left(\frac{a_2 b_1}{c_1 \sqrt{a_2^2 + b_1^2 + c_1^2}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{a_2 b_2}{c_1 \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right), & \begin{cases} c_1 \neq 0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 \neq 0; \end{cases} \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{a_1 b_1}{c_1 \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{a_1 b_2}{c_1 \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right), & \begin{cases} c_1 \neq 0, \\ a_1 \neq 0, \\ a_2 = 0; \end{cases} \\ 0, c_1 \neq 0, a_1 = 0, a_2 = 0; \\ 0, c_1 = 0. \end{cases} \quad (2.110)$$

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.84) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.85) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} dt_3 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(y_m + y_n) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 + (y_m + y_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.93) принимает вид (2.106) и может быть вычислен по (2.110) для I_{mn} после замены c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 и подстановки (2.95).

Для подплощадок $S_n \perp Z$ ($n=(Nc_Y+1) \dots Nc_Z, (Nd_Y+1) \dots Nd_Z$) интеграл I_{mn} в (2.83) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.96) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(y_m - y_n - t_2) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.97) принимает вид

$$I_{mn} = \int_{b_2}^{b_1} d\Gamma_2 \int_{a_2}^{a_1} \frac{-\Gamma_2 d\Gamma_1}{[\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + c_1^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.111)$$

где остальные константы определяются (2.98).

Интеграл по $d\Gamma_1$ в (2.111) можно взять по формуле (2.107), откуда

$$I_{mn} = \int_{b_2}^{b_1} \frac{-\Gamma_2 a_1}{(\Gamma_2^2 + c_1^2) \sqrt{\Gamma_2^2 + c_1^2 + a_1^2}} d\Gamma_2 - \int_{b_2}^{b_1} \frac{-\Gamma_2 a_2}{(\Gamma_2^2 + c_1^2) \sqrt{\Gamma_2^2 + c_1^2 + a_2^2}} d\Gamma_2. \quad (2.112)$$

Интеграл по $d\Gamma_2$ в (2.112) несложно привести к виду

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|, \quad a \neq 0, \quad (2.113)$$

откуда получаем окончательное аналитическое выражение для I_{mn}

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{a_1 - \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + c_1^2}}{a_1 - \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + b_1^2 + c_1^2}}{a_2 - \sqrt{a_2^2 + b_1^2 + c_1^2}} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_1^2}}{a_2 - \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right|. \quad (2.114)$$

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.84) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.96) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(y_m + y_n + t_2) dt_1}{[(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2 + (z_m - z_n)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.99) принимает вид (2.111) с обратным знаком и может быть вычислен по (2.114) для I_{mn} , взяв его с обратным знаком, заменив c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 и подставляя (2.100).

Для подплощадок $S_n \perp X$ ($n=(Nc_Z+1) \dots Nc, (Nd_Z+1) \dots N$) интеграл I_{mn} в (2.83) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.101) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} \frac{(y_m - y_n - t_2) dt_3}{[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.102) совпадает с (2.111), а значит, может быть вычислен по (2.114), подставляя (2.103).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.84) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.101) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} \frac{(y_m + y_n + t_2) dt_3}{\left[(x_m - x_n)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.104) принимает вид (2.111) с обратным знаком и может быть вычислен по (2.114) для I_{mn} , взяв его с обратным знаком, заменив c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 и подставляя (2.105).

Подплощадки диэлектрик-диэлектрик $\perp Z$

Рассмотрим вычисление строк матрицы \underline{S} с номерами $m=(N_Y+1)\dots N_Z$, соответствующими подынтервалам диэлектрик-диэлектрик $\perp Z$. Для этого случая, $\underline{p}_m=\underline{z}$, поэтому в числителях выражений (2.83) и (2.84) (которые предстоит оценить, аналогично предыдущему разделу поочерёдно интегрируя по подынтервалам $\perp Y$, $\perp Z$ и $\perp X$) останутся только Z -координаты.

Для подплощадок $S_n \perp Y$ ($n=1\dots N_{c_Y}, (N_{c_Y}+1)\dots N_{d_Y}$) интеграл I_{mn} в (2.83) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.85) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} dt_3 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(z_m - z_n - t_3) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.86) совпадает с (2.111), а значит, может вычисляться по (2.114), подставляя (2.88).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.84) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.85) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} dt_3 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(z_m - z_n - t_3) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 + (y_m + y_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.93) принимает вид (2.111), а значит, может быть вычислен по (2.114) для I_{mn} простой заменой c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 , подставив (2.95).

Для подплощадок $S_n \perp Z$ ($n=(N_{c_Y}+1)\dots N_{c_Z}, (N_{d_Y}+1)\dots N_{d_Z}$) интеграл I_{mn} в (2.83) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.96) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(z_m - z_n) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.97) совпадает с (2.106), а значит, может вычисляться по (2.110), подставляя (2.98).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.84) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.96) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(z_m - z_n) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.99) принимает вид (2.106), а значит, может вычисляться по (2.110) для I_{mn} после замены c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 , подставляя (2.100).

Для подплощадок $S_n \perp X$ ($n=(N_{c_z}+1)\dots N_{c_z}, (N_{d_z}+1)\dots N$) интеграл I_{mn} в (2.83) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.101) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} \frac{(z_m - z_n - t_3) dt_3}{\left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.102) совпадает с (2.111) и может быть вычислен по (2.114), но подставляя (2.103).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.84) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.101) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} \frac{(z_m - z_n - t_3) dt_3}{\left[(x_m - x_n)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.104) совпадает с (2.111), и может быть вычислен по (2.114) для I_{mn} после замены c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 , но подставляя (2.105).

Подплощадки диэлектрик-диэлектрик $\perp X$

Рассмотрим вычисление строк матрицы \underline{S} с номерами $m=(N_z+1)\dots N$, соответствующими подынтервалам диэлектрик-диэлектрик $\perp X$. Для этого случая, $\underline{p}_m=\underline{x}$, поэтому в числителях выражений (2.83) и (2.84) (которые предстоит оценить, аналогично предыдущему разделу поочередно интегрируя по подынтервалам $\perp Y$, $\perp Z$ и $\perp X$) останутся только X -координаты.

Для подплощадок $S_n \perp Y$ ($n=1\dots N_{c_y}, (N_c+1)\dots N_{d_y}$) интеграл I_{mn} в (2.83) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.85) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} dt_3 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(x_m - x_n - t_1) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 + (y_m - y_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.86) принимает вид

$$I_{mn} = \int_{b_2}^{b_1} d\Gamma_2 \int_{a_2}^{a_1} \frac{-\Gamma_1 d\Gamma_1}{\left[\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + c_1^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.115)$$

где остальные константы определяются (2.88).

Интеграл по $d\Gamma_1$ в (2.115) можно взять по формуле 1.2.43.18 из [106]

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (2.116)$$

откуда получаем

$$I_{mn} = -\int_{b_2}^{b_1} \frac{d\Gamma_2}{\sqrt{\Gamma_2^2 + c_1^2 + a_1^2}} + \int_{b_2}^{b_1} \frac{d\Gamma_2}{\sqrt{\Gamma_2^2 + c_1^2 + a_2^2}}. \quad (2.117)$$

Интеграл по $d\Gamma_2$ в (2.117) стандартный (2.89), так что окончательное аналитическое выражение для I_{mn} будет следующим

$$I_{mn} = \ln \left(\frac{b_2 + \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + c_1^2}}{b_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \cdot \frac{b_1 + \sqrt{a_2^2 + b_1^2 + c_1^2}}{b_2 + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_1^2}} \right). \quad (2.118)$$

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.84) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.85) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} dt_3 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(x_m - x_n - t_1) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 + (y_m + y_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.93) принимает вид (2.115), а значит, может вычисляться по (2.118) для I_{mn} после замены c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 , подставляя (2.95).

Для подплощадок $S_n \perp Z$ ($n=(Nc_Y+1)\dots Nc_Z, (Nd_Y+1)\dots Nd_Z$) интеграл I_{mn} в (2.83) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.96) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(x_m - x_n - t_1) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.97) совпадает с (2.115) и может вычисляться по окончательной формуле (2.118), подставляя (2.98).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.84) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.96) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dx}{2}}^{\frac{Dx}{2}} \frac{(x_m - x_n - t_1) dt_1}{\left[(x_m - x_n - t_1)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2 + (z_m - z_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.99) принимает вид (2.115) и может вычисляться по окончательной формуле (2.118) после замены c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 , подставляя (2.100).

Для подплощадок $S_n \perp X$ ($n=(Nc_Z+1)\dots Nc, (Nd_Z+1)\dots N$) интеграл I_{mn} в (2.83) после подстановки (2.74) и (2.75) с учётом (2.101) получается таким

$$I_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} \frac{(x_m - x_n) dt_3}{\left[(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n - t_2)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.102) совпадает с (2.106), а значит, может быть вычислен по (2.110), но подставляя (2.103).

Интеграл \hat{I}_{mn} в (2.84) после подстановки (2.74) и (2.76) с учётом (2.101) получается таким

$$\hat{I}_{mn} = \int_{\frac{-Dy}{2}}^{\frac{Dy}{2}} dt_2 \int_{\frac{-Dz}{2}}^{\frac{Dz}{2}} \frac{(x_m - x_n) dt_3}{\left[(x_m - x_n)^2 + (y_m + y_n + t_2)^2 + (z_m - z_n - t_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

и после замены переменных (2.104) принимает вид (2.106), а значит, может быть вычислен по (2.110) для I_{mn} после замены c_1 на c_2 , b_1 на d_1 , b_2 на d_2 , подставляя (2.105).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТКЛИКА

В данном разделе приводится обзор исследований по вычислению отклика схем МПЛП и представлены новые аналитические модели для вычисления временного отклика периодических структур межсоединений.

3.1 Обзор исследований

Не вдаваясь слишком глубоко в историю исследований МПЛП, отметим что Pipes в [107], впервые показал, как можно использовать матричную алгебру для решения с минимальными затратами трудной и громоздкой задачи анализа МПЛП. В работе [108] Pipes рассмотрел МПЛП в установленном режиме, а в [109] привёл решение задачи переходного анализа симметризованной МПЛП через определённый интеграл от функции Бесселя, применяя матричную теорию и преобразование Лапласа. В известной работе [110] Schelkunoff привел вывод телеграфных уравнений, описывающих МПЛП.

Atemiya [111] представил анализ временного отклика МПЛП без потерь, не ограничиваясь двумя линиями и допущением слабой связи между ними, а также ввёл понятия схемы согласованного окончания и эквивалентной схемы для МПЛП. В классической работе [112] Marx с помощью матричного анализа развил теорию распространения волн в многопроводных линиях передачи без потерь с неоднородными диэлектриками.

В известной работе [113] Paul представил метод вывода решений уравнений однородной многопроводной линии передачи и метод для вывода матричных схемных параметров отрезка линии. Должно отметить существенный вклад этого автора в исследование различных аспектов проблемы МПЛП. Названия многих его работ, опубликованных в технических отчётах, трудах симпозиумов и журналах, приведены в посвящённой перекрёстным помехам десятой главе монографии [114]. Кроме того, существует его монография, специально посвящённая анализу многопроводных линий передачи [115].

Нельзя не отметить также и важную работу [116], в которой Chang представил эффективный метод для вычисления переходной характеристики N -проводной системы линий передачи, которая характеризуется многочисленными модами распространения с неравными фазовыми скоростями. Для вывода расчетного алгоритма им была создана эквивалентная схема, состоящая из развязанных линий передачи и двух трансформаторов, и преобразована в два развязанных резистивных N -полюсника.

Существенным вкладом в анализ МПЛП, подводящим итог предыдущих исследований, стала монография [117], в которой Frankel, в частности, наряду с МПЛП без потерь с однородным диэлектрическим заполнением рассмотрел квази-ТЕМ теорию МПЛП с малыми потерями и неоднородным диэлектрическим заполнением. В последней главе книги на двух простых примерах линий передачи с неоднородным диэлектриком рассмотрены пределы точности квазистатических аппроксимаций.

Одним из немногих авторов теоретических работ по применимости квази-ТЕМ подхода в анализе МПЛП является Lindell. Так в его работе [118] рассмат-

ривается обобщенная неоднородная экранированная N-проводная линия передачи, и выводятся некоторые свойства квази-ТЕМ мод, распространяющихся в ней. В другой его работе [119] теория для квази-ТЕМ мод, распространяющихся в поперечно неоднородной (много диэлектрической), продольно регулярной линии передачи, прежде выведенная для гармонических волн, выводится для переходных сигналов.

Весьма примечательна посвящённая вычислению временного отклика МПЛП работа [120] (Djordjevic, Sarkar и Harrington), ставшая предметом многочисленных ссылок исследователей МПЛП. Статья уникальна тем, что в ней описывается и сравнивается несколько методов расчета отклика линий, основанных на использовании известных параметров теории цепей. К ним относится метод на основе пошагового во времени решения телеграфных уравнений, метод нормальных волн во временной области, метод нормальных волн в частотной области и метод свертки, использующий функции Грина для линии. Последний позволяет исследовать наиболее общий случай линий с потерями, нагруженных нелинейными цепями.

Необходимо отметить активную работу исследователей по развитию теории МПЛП в направлении более точного учёта реального диэлектрического заполнения МПЛП: от однородного изотропного заполнения до неоднородного анизотропного хирального заполнения применительно как к диэлектрическим, так и магнитным параметрам, включая потери. В качестве примера, можно привести работу [121], в которой Olyslager и др. разработали квази-ТЕМ аппроксимацию для МПЛП, помещённых в неоднородную би-изотропную среду.

Продолжаются исследования и по развитию общей теории модального анализа. Так, впервые выполненный в упоминавшейся работе [116] вывод метода развязки системы МПЛП в значительно более простом и понятном виде представили Pan и др. в работе [122]. В работе [123] Lei и др. основательно исследуют ряд тонких вопросов, возникающих при использовании метода модальной декомпозиции, в частности, доказывают диагонализируемость матриц LC и CL для линий передачи без потерь (хотя диагонализируемость их комплексных аналогов, ZY и YZ матриц, для линий с потерями не гарантируется). Gentili и Salazar-Palma в [124] после краткого обзора квази-ТЕМ анализа систем связанных линий передачи без потерь в неоднородной среде, отталкиваясь от обобщённых телеграфных уравнений, вычисляют характеристический импеданс нормальных мод в соответствии с тремя обычными определениями для случая одиночной линии: мощность-ток, мощность-напряжение и напряжение-ток. В отличие от квази-ТЕМ случая одиночной линии, показывается, что эти три определения приводят, в общем случае, к различным значениям модального характеристического импеданса.

Ряд исследований посвящён вычислению отклика МПЛП с учётом дисперсии. Farr и др. в [125] исследуют дисперсию многопроводных микрополосковых линий с помощью спектральной процедуры Галеркина. В работе [126] Wing и Wang представили основанную на полноволновом анализе новую вычислительную модель для вычисления временного отклика МПЛП с дисперсией, которая учитывает все возможные компоненты поля и удовлетворяет всем требуемым

граничным условиям. В работе [127] Carin и Webb с помощью полномасштабного анализа рассмотрели вопрос взаимовлияния между линиями в быстродействующих межсоединениях СБИС.

Вычисление временного отклика МПЛП с учётом нелинейных окончаний также интенсивно исследуется. Matthei и др. в [128] представили удобные для разработчика цифровых схем упрощенные формулы для вычисления приближенных амплитуд перекрестных помех и форм сигналов на соседних линиях, соединяющих логические вентили, оконечные импедансы которых аппроксимируются SPICE-анализом линейными "эффективными сопротивлениями". Schutt-Aine и Mittra в [129] представили новый подход для анализа переходных процессов в связанных линиях передачи с потерями и нелинейных окончаний, использующий формулировку модальных параметров рассеяния. В работе [130] Echigo и Sato для вычисления переходных откликов в связанных линиях, оканчивающихся нелинейными импедансами, применили модальный подход, а окончания линий характеризовали нелинейным коэффициентом отражения. В своей классической работе [131] Djordjevic и др. представили новый метод для переходного анализа линий передачи с потерями и с произвольными нелинейными оконечными цепями. В работе [132] Lin и Kuh представили новый подход для переходного моделирования межсоединений с потерями, оканчивающихся произвольными нелинейными элементами, с помощью свертки. Maio и др. [133] рассмотрели объединённый частотно-временной анализ нелинейно нагруженных межсоединений с малыми потерями, дающий высокую точность при малых вычислительных затратах за счёт неоднородной кусочно-линейной аппроксимации переходных функций.

При исследовании межсоединений различных уровней интеграции возникла необходимость в вычислении отклика и нерегулярных МПЛП. Одной из трудностей является то, что традиционный для регулярных МПЛП с неоднородным диэлектриком и с потерями модальный анализ неприменим для нерегулярных МПЛП. Рассмотрим несколько работ, представляющих различные подходы к решению этой задачи. В работе [134] Palusinski и Lee представили эффективный и гибкий метод временного анализа для расчета отражений и перекрестных наводок в системе многопроводных связанных линий, в том числе и с нелинейными нагрузками. Mehalic и Mittra [135] представили анализ сужающихся связанных микрополосковых линий передачи с помощью итерационно-пертурбационного подхода, применяемого в пространственной области. Dhaene и др. в работе [136] представили новую не итеративную зависящую от времени SPICE-совместимую схемную модель для переходного анализа общих нерегулярных структур межсоединений, оканчивающихся произвольными линейными или нелинейными нагрузками, с помощью параметров рассеяния. Tripathi и Orhanovic [137] представили численные методы для описания и анализа во временной области регулярных и нерегулярных МПЛП с потерями и дисперсией. Наконец, в крупных работах [138, 139] Fung Yel Chang для моделирования переходного отклика неоднородных связанных линий передачи с потерями, которые характеризуются частотно-зависимыми параметрами, представил метод релак-

сации формы сигнала, являющийся обобщением метода характеристик, и эффективный дискретно-временной метод.

Рассмотрим основные работы, посвящённые оценке отклика различных схем МПЛП. Из работ, рассматривающих последовательное соединение отрезков МПЛП, выделяется работа [140], в которой Gu и Kong исследуют переходные процессы для структур, состоящих из отрезков одиночных и связанных линий с разными характеристическими проводимостями и емкостей на стыках этих отрезков. В качестве альтернативы Pan и др. [141], применив частотный подход, представили другое решение этой же задачи, имеющее несколько совершенно новых особенностей. Для вычисления временного отклика МПЛП с ответвлениями эффективный метод представили Agrawal и др. [142]. В работе [143] Razban исследует случай, называемый им частично связанными линиями, когда от МПЛП с определённой дистанции ответвляется несколько проводников. Одними из первых анализ самой общей (имеющей замкнутые контуры) схемы межсоединений из отрезков МПЛП без потерь, основанный на использовании матриц рассеяния, предложили Tesche и Liu [144]. В работе [145] Liao и Dai для анализа схем межсоединений предложили новый подход (wave spreading evaluation), предполагающий разделение анализируемой схемы на две части: одна состоит из компонент, описываемых S-параметрами, а другая – из топологии идеальных межсоединений. Djordjevic и Sarkar [146] рассматривают системы, состоящие из произвольного числа отрезков МПЛП с потерями и частотно-зависимыми параметрами, произвольным образом соединённых и оканчивающихся произвольными линейными схемами. Winkelstein и др. [147] представили метод для описания сложной схемы связанных многопортовых линий передачи через функции Грина во временной области, реализованный в схемном симуляторе и позволяющий очень точно моделировать произвольные цепи линий передачи с нелинейными моделями цифровых схем на уровне транзистора. В работе [148] Poltz кратко описал все основные этапы реализации своего подхода к решению указанной задачи от разбиения сложных геометрических конфигураций МПЛП на более простые участки, моделируемые двух- и трёхмерными конфигурациями до построения соответствующей схемной SPICE-модели. Bracken и др. [149] развили метод асимптотической оценки формы сигнала, зарекомендовавший себя эффективным и точным методом для моделирования сосредоточенных линейных схем произвольной топологии, для моделирования распределённых и нелинейных элементов. Celik и Cangellaris в работе [150] на моделирование схем, содержащих МПЛП с дисперсией, распространили алгоритм вычисления аппроксимации Падэ сосредоточенной линейной RLC схемы посредством процесса Лэнкзоса (Lanczos), который даёт более точные аппроксимации, чем метод асимптотической оценки формы сигнала и его производные.

Наконец, должно особо отметить исследования, проводимые в Канаде под руководством профессора Nakhla и, пожалуй, на сегодня самые близкие к практической реализации решения задачи межсоединений быстродействующих электронных схем. Так, в работе [151] Nakhla использует предложенный им для нелинейных схем с распределёнными частотно-зависимыми параметрами метод кусочной декомпозиции (piecewise decomposition) применительно к общей зада-

че произвольной схемы межсоединений с произвольными нагрузками. В работе [152] Griffith и Nakhla для анализа схем связанных линий передачи с потерями и с произвольными линейными оконечными и соединительными схемами представили новый метод, основанный на численной инверсии преобразования Лапласа. Griffith и др. в работе [153] описывают структуру САПР для решения трёх аспектов проблемы быстродействующих межсоединений, а именно, моделирования, анализа чувствительности и оптимизации быстродействия. Работу [154] Zhang и Nakhla посвятили проблеме влияния разброса геометрических параметров межсоединений СБИС и свойств материалов на процент выхода годных изделий в процессе производства печатных плат и многокристальных модулей. В работе приведено систематическое описание теоретической стыковки нескольких методов моделирования линейных/нелинейных, сосредоточенных/распределённых схем.

Из проведённого обзора видно, что исследования по вычислению отклика межсоединений ведутся очень интенсивно и широко. Основное направление этих исследований – разработка всё более универсальных и эффективных математических моделей для временного отклика. Между тем, внимание автора привлёк один из важных для практики частных случаев конфигурации межсоединений, а именно, последовательное соединение отрезков линий передачи с нагрузками на стыках.

Действительно, такая структура может описывать различные реальные конфигурации межсоединений. Примерами могут служить случаи, когда протяжённая структура имеет: подключенные к её линиям сосредоточенные элементы, различные сосредоточенные неоднородности в сигнальных линиях (контактные площадки, переходные отверстия, изгибы), неоднородности из-за поперечных сигнальных линий соседнего слоя или неоднородности в конструкции общей земли, ответвления малой длины, позволяющей моделировать их сосредоточенными элементами (адресная шина микросхем памяти, объединительная панель или материнская плата с многоконтактными соединителями печатных плат).

Хотя строгий анализ схем МПЛП требует модального подхода, первая приближенная оценка влияния соседних межсоединений может быть выполнена посредством случая двух связанных линий передачи, который, в свою очередь, легко получить линейной комбинацией решений для одиночных линий передачи в чётном и нечётном режимах возбуждения. Поэтому к разработке эффективных, особенно аналитических, моделей для вычисления временного отклика различных структур последовательно соединённых отрезков одиночных линий передачи привлечено особое внимание исследователей.

Так, давно известна аппроксимация линии передачи с распределёнными по длине ёмкостными нагрузками линией передачи с увеличенной погонной ёмкостью [155]. Эта аппроксимация тем более корректна, чем чаще размещены ёмкости. В случае редко размещённых ёмкостей, их влияние на форму сигнала в конце линии корректнее позволяет учесть аналитическая модель, учитывающая увеличение времени фронта сигнала при его распространении по линии передачи [156]. Известна модель для структуры из последовательно соединённых от-

резков линии передачи с различными волновыми сопротивлениями и задержками, но без ёмкостей на стыках [157]. Разработаны модели для периодической структуры из последовательно соединённых отрезков линии передачи с ёмкостями на стыках [140].

Детальный обзор этих моделей выявляет ряд их достоинств и недостатков.

Достоинства аналитических моделей определяются окончательными аналитическими формулами в явном виде и заключаются в следующем:

возможность вычисления не всех, а только необходимого числа составляющих временного отклика;

точное вычисление составляющих временного отклика по элементарным математическим функциям;

вычисление составляющих временного отклика не в полном, а только в необходимом временном диапазоне;

возможность проведения дальнейшего математического анализа временного отклика, например, анализа чувствительности.

Недостатки аналитических моделей:

малая универсальность, т.е. необходимость получения отдельной модели для каждой структуры, для каждой точки структуры и для каждого стандартного воздействия;

ограничение точности модели числом учитываемых составляющих отклика;

громоздкость получения моделей и их окончательного вида.

Например, одна из наиболее универсальных аналитических моделей ([140]), позволяет вычислять отклик (на перепад напряжения с линейно нарастающим фронтом) в начале и конце периодической структуры из последовательно соединённых отрезков линий передачи (т.е. отрезков только с двумя чередующимися значениями волновых сопротивлений и задержек) с одинаковыми ёмкостными нагрузками на стыках. Кроме того, структура состоит только из нечётного числа отрезков (начиная с 3) и имеет равные волновые сопротивления входных и выходных линий передачи. Наконец, эта модель корректна лишь при небольшой разнице характеристических адмиттансов отрезков, поскольку в отклике на конце линии учитываются проходящая волна и только составляющая, компоненты которой испытывают два отражения от стыков, а в отклике в начале линии учитываются только составляющие, компоненты которых испытывают одно и три отражения от стыков.

Таким образом, совершенствование известных и разработка новых аналитических моделей для временного отклика, в силу присущих им достоинств и остающихся недостатков, остаётся весьма актуальной. В последующих разделах представлен ряд моделей, разработанных в ходе исследований автора. Выполнены также некоторые простые, но важные усовершенствования этих моделей, тщательное тестирование, оценка точности и вычислительной эффективности по сравнению с другими моделями [158], но здесь они не приводятся.

3.2 Аналитические модели для временного отклика

Прежде всего, отметим следующие аспекты, относящиеся ко всем моделям, представленным в данном разделе.

1. Полагается, что в межсоединениях отсутствуют потери, параметры межсоединений не зависят от частоты, и в них распространяется только основная ТЕМ волна. Y_i , τ_i – адмиттанс и задержка i -го отрезка линии передачи, s – комплексная частота.

2. Все модели аналитические и разработаны для вычисления временного отклика на входной сигнал, являющийся перепадом напряжения с линейно нарастающим фронтом

$$V_{in}(t) = (V_{ino}/t_r) [tU(t) - (t - t_r)U(t - t_r)], \quad (2.1)$$

где $U(t)$ – единичная функция, t_r – длительность фронта входного сигнала, а V_{ino} – амплитуда перепада, равная напряжению, измеренному на входной линии передачи при сопротивлении генератора равном волновому сопротивлению входной линии передачи, т.е. амплитуда перепада равна половине ЭДС генератора.

3. Модели для одиночных линий, пригодны и для связанных (подход обоснован [159] и уже использован [140,160]): подставляя параметры отрезков для четной и нечетной (верхние индексы "е" и "о") мод возбуждения, находят временной отклик, т.е. отражённую и проходящую (нижние индексы "R" и "T") волны напряжения, на входной сигнал (2.1) для каждой из этих мод, а затем – напряжение в начале активной $V_1(t)$, в начале пассивной $V_2(t)$, в конце активной $V_3(t)$ и в конце пассивной $V_4(t)$ линий передачи

$$V_1(t) = \frac{1}{2} [V_R^e(t) + V_R^o(t)], \quad V_3(t) = \frac{1}{2} [V_T^e(t) + V_T^o(t)],$$

$$V_2(t) = \frac{1}{2} [V_R^e(t) - V_R^o(t)], \quad V_4(t) = \frac{1}{2} [V_T^e(t) - V_T^o(t)].$$

3.2.1 Структура из двух отрезков линии передачи с ёмкостной нагрузкой на стыке

Следуя подходу работы [156] и используя формулы для коэффициентов передачи и отражения из работы [140], получены аналитические модели для временного отклика структуры, эквивалентная схема которой показана на рис. 3.1 [161]. Ниже приводится вывод этих моделей: сначала записываются коэффициенты передачи и отражения в частотной области, затем в частотной области получают формулы для вычисления откликов в начале и конце структуры, наконец, после обратного преобразования Лапласа получают окончательные аналитические модели для вычисления временного отклика.

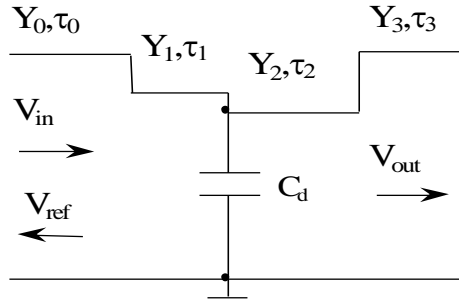


Рис. 3.1. Эквивалентная схема структуры из двух отрезков линий передачи с емкостной нагрузкой на стыке

Коэффициент передачи структуры в частотной области, учитывающий проходящую волну и составляющие отклика, испытавшие 2 отражения,

$$T(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = T_{10}T_{21}T_{32} \exp(-s(\tau_1 + \tau_2)) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{i-1} \Gamma_{i,i+1} \Gamma_{j+1,j} \prod_{k=j+1}^{i-1} (T_{k,k+1} T_{k+1,k}) \exp\left(-2s \sum_{k=j+1}^i \tau_k\right) \right),$$

а коэффициент отражения структуры в частотной области, учитывающий составляющие отклика, испытавшие 1 отражение и 3 отражения,

$$\Gamma(s) = \frac{V_{ref}(s)}{V_{in}(s)} = \Gamma_{01} + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{m,m+1} \prod_{k=0}^2 (T_{k+1,k} T_{k+1,k}) \exp\left(-2s \sum_{k=1}^m \tau_k\right) \cdot \left(1 + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i+1}^2 \Gamma_{i+1,i} \Gamma_{j,j+1} \prod_{k=i+1}^{j-1} (T_{k,k+1} T_{k+1,k}) \exp\left(-2s \sum_{k=i+1}^j \tau_k\right) \right),$$

где

$$T_{i+1,i} = 1 + \Gamma_{i,i+1} = \frac{2Y_i}{Y_i + sC_i + Y_{i+1}}, \quad T_{i,i+1} = 1 + \Gamma_{i+1,i} = \frac{2Y_{i+1}}{Y_i + sC_i + Y_{i+1}},$$

$$\Gamma_{i,i+1} = \frac{Y_i - sC_i - Y_{i+1}}{Y_i + sC_i + Y_{i+1}}, \quad \Gamma_{i+1,i} = \frac{Y_{i+1} - sC_i - Y_i}{Y_i + sC_i + Y_{i+1}}.$$

После подстановки соответствующих индексов ($i=0,1,2$) для T и Γ коэффициенты передачи и отражения

$$T(s) = T_{10}T_{32} \left[\frac{d_1}{(s+a_1)} \exp(-s(\tau_1 + \tau_2)) + \Gamma_{10} \left(-\frac{s-a_2}{(s+a_1)^2} \right) d_1 \exp(-s(3\tau_1 + \tau_2)) + \Gamma_{10}\Gamma_{23} \frac{d_1^2 d_2}{(s+a_1)^3} \exp(-3s(\tau_1 + \tau_2)) + \Gamma_{23} \left(-\frac{s+a_2}{(s+a_1)^2} \right) d_1 \exp(-s(\tau_1 + 3\tau_2)) \right],$$

$$\Gamma(s) = \Gamma_{01} + \left(-\frac{s-a_2}{s+a_1} \right) T_{10}T_{01} \exp(-2s\tau_1) + \Gamma_{10} \left(\frac{s-a_2}{s+a_1} \right)^2 T_{10}T_{01} \exp(-4s\tau_1) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\Gamma_{10}\Gamma_{23}\left(-\frac{s-a_2}{s+a_1}\right)\frac{d}{(s+a_1)^2}T_{10}T_{01}\exp(-2s(2\tau_1+\tau_2))+ \\
 &+ \Gamma_{10}\Gamma_{23}^2\frac{d^2}{(s+a_1)^4}T_{10}T_{01}\exp(-4s(\tau_1+\tau_2))+ \\
 &+ \Gamma_{23}^2\left(-\frac{s+a_2}{s+a_1}\right)\frac{d}{(s+a_1)^2}T_{10}T_{01}\exp(-2s(\tau_1+2\tau_2))+ \\
 &+ \Gamma_{23}\frac{d}{(s+a_1)^2}T_{01}T_{10}\exp(-2s(\tau_1+\tau_2)),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 T_{10} &= \frac{2Y_0}{Y_0+Y_1}, & T_{32} &= \frac{2Y_2}{Y_2+Y_3}, & T_{01} &= \frac{2Y_1}{Y_0+Y_1}, \\
 T_{21} &= \frac{2Y_1}{Y_1+sC_1+Y_2} = \frac{d_1}{s+a_1}, & T_{12} &= \frac{2Y_2}{Y_1+sC_1+Y_2} = \frac{d_2}{s+a_1}, \\
 \Gamma_{01} &= -\Gamma_{10} = \frac{Y_0-Y_1}{Y_0+Y_1}, & \Gamma_{23} &= -\Gamma_{32} = \frac{Y_2-Y_3}{Y_2+Y_3}, \\
 \Gamma_{12} &= \frac{Y_1-sC_1-Y_2}{Y_1+sC_1+Y_2} = -\frac{s-a_2}{s+a_1}, & \Gamma_{21} &= \frac{Y_2-sC_1-Y_1}{Y_1+sC_1+Y_2} = -\frac{s+a_2}{s+a_1}, \\
 a_1 &= \frac{Y_1+Y_2}{C_d}, & a_2 &= \frac{Y_1-Y_2}{C_d}, \\
 d_1 &= \frac{2Y_1}{C_d}, & d_2 &= \frac{2Y_2}{C_d}, & d &= d_1 d_2.
 \end{aligned}$$

Отклики на ближнем и дальнем концах структуры в частотной области $V_{out}(s)=\Gamma(s)V_{in}(s)$, $V_{ref}(s)=\Gamma(s)V_{in}(s)$, где $V_{in}(s)$ – преобразование Лапласа для (2.1). Следуя подходу работы [156], получаем после обратного преобразования Лапласа окончательные аналитические модели для вычисления временного отклика проходящего и отраженного сигналов

$$\begin{aligned}
 V_T(t) &= \frac{V_{ino}}{tr} T_{10}T_{32} \frac{d_1}{a_1} \left[R(1, a_1(t-(\tau_1+\tau_2))) - \Gamma_{10} \left(R(1, a_1(t-(3\tau_1+\tau_2))) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\Delta a_1}{a_1} R(2, a_1(t-(3\tau_1+\tau_2))) \right) - \Gamma_{23} \left(R(1, a_1(t-(\tau_1+3\tau_2))) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\Delta a_2}{a_1} R(2, a_1(t-(\tau_1+3\tau_2))) \right) + \Gamma_{10}\Gamma_{23} \left(\frac{d}{a_1} \right) R(3, a_1(t-3(\tau_1+\tau_2))) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_R(t) = & \frac{V_{ino}}{t_r} \Gamma_{01} Q(t) + \frac{V_{ino}}{t_r} T_{01} T_{10} \left[\Gamma_{23} \left(\frac{d}{a_1^2} \right) R(2, a_1(t - 2(\tau_1 + \tau_2))) - \right. \\
 & - 2\Gamma_{10} \Gamma_{23} \left(\frac{d}{a_1^2} \right) \left(R(2, a_1(t - 2(2\tau_1 + \tau_2))) - \frac{\Delta a_1}{a_1} R(3, a_1(t - 2(2\tau_1 + \tau_2))) \right) + \\
 & + \Gamma_{10} \left(Q(t - 4\tau_1) - 2 \frac{\Delta a_1}{a_1} R(1, a_1(t - 4\tau_1)) + \left(\frac{\Delta a_1}{a_1} \right)^2 R(2, a_1(t - 4\tau_1)) \right) - \\
 & - (\Gamma_{23})^2 \left(\frac{d}{a_1^2} \right) \left(R(2, a_1(t - 2(\tau_1 + 2\tau_2))) - \frac{\Delta a_2}{a_1} R(3, a_1(t - 2(\tau_1 + 2\tau_2))) \right) - \\
 & \left. - \left(R(t - 2\tau_1) - \frac{\Delta a_1}{a_1} R(1, a_1(t - 2\tau_1)) \right) + (\Gamma_{23})^2 \Gamma_{10} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^2 R(4, a_1(t - 4(\tau_1 + \tau_2))) \right],
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta a_1 = a_1 + a_2, \quad \Delta a_2 = a_1 - a_2,$$

$$R(n, x) = \frac{1}{a_1} [xP(n, x) - x_r P(n, x_r)] - \frac{n}{a_1} [P(n+1, x) - P(n+1, x_r)],$$

$$Q(t) = tU(t) - (t - t_r)U(t - t_r)$$

(здесь $P(n, x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$, $x_r = x - a_1 t_r$).

3.2.2 Периодическая структура из N последовательно соединенных отрезков линии передачи с ёмкостными нагрузками на стыках

Аналитические модели работы [140], имеют следующие ограничения:

волновые сопротивления входной и выходной, т.е. нулевой и (n+1)-й, линий передачи должны быть равны друг другу;

учёт проходящей волны и только составляющих отклика, испытавших два отражения, для отклика в конце структуры;

учёт только составляющих отклика, испытавших одно и три отражения, для отклика в начале структуры;

структура может содержать только нечетное число отрезков;

отрезки могут иметь только две различные длины;

нет учёта дополнительных резистивных нагрузок на стыках.

В последующих разделах приводятся усовершенствованные математические модели, позволяющие снять эти ограничения.

Периодическая структура из нечетного числа последовательно соединенных отрезков линий передачи при разных характеристических адмиттансах входной и выходной линий передачи

Аналитические модели работы [140] получены для равных характеристических адмиттансов входной и выходной линий передачи ($Y_0 = Y_{n+1}$ на рис. 3.2).

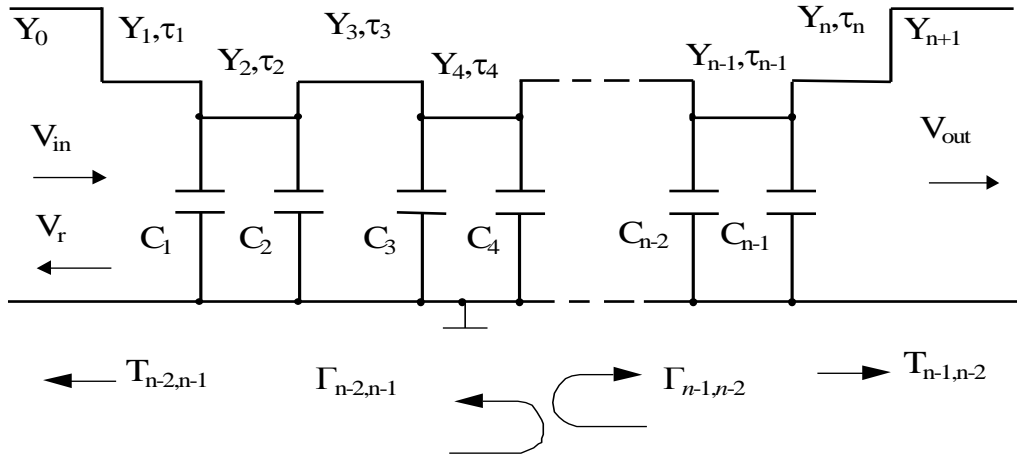


Рис. 3.2. Эквивалентная схема периодической структуры из последовательно соединенных отрезков линии передачи с емкостными нагрузками на стыках

Пусть $Y_0 \neq Y_{n+1}$, тогда коэффициенты отражения от стыка и коэффициенты передачи стыка в прямом и обратном направлениях:

$$\Gamma_{01} = -\Gamma_{10} = \frac{Y_0 - Y_1}{Y_0 + Y_1},$$

$$\Gamma_{n+1,n} = -\Gamma_{n,n+1} = \frac{Y_{n+1} - Y_1}{Y_{n+1} + Y_1},$$

$$\Gamma_{2k-1,2k} = \Gamma_{2k-1,2k-2} = \frac{Y_1 - Y_2 - sC_d}{Y_1 + Y_2 + sC_d} = -\frac{s + (-1)^{2k-1} a_2}{s + a_1},$$

$$\Gamma_{2k,2k-1} = \Gamma_{2k,2k+1} = \frac{Y_2 - Y_1 - sC_d}{Y_1 + Y_2 + sC_d} = -\frac{s + (-1)^{2k} a_2}{s + a_1},$$

$$T_{01} = \frac{2Y_1}{Y_0 + Y_1}, \quad T_{10} = \frac{2Y_0}{Y_0 + Y_1},$$

$$T_{n+1,n} = \frac{2Y_1}{Y_{n+1} + Y_1}, \quad T_{n,n+1} = \frac{2Y_{n+1}}{Y_{n+1} + Y_1},$$

$$T_{2k-1,2k} = T_{2k-1,2k-2} = \frac{2Y_2}{Y_1 + Y_2 + sC_d} = \frac{d_2}{s + a_1},$$

$$T_{2k,2k-1} = T_{2k,2k+1} = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2 + sC_d} = \frac{d_1}{s + a_1},$$

где

$$a_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{C_d}, \quad a_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{C_d}, \quad d_j = \frac{2Y_j}{C_d} \quad (j=1,2).$$

Коэффициенты отражения и передачи структуры в частотной области

$$\Gamma(s) = \Gamma_{01} + \sum_{m=1}^n \Gamma_{m,m+1} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{m-1} T_{01} T_{10} \exp(-2s\tau_{[m/2]}) \cdot \left\{ 1 + \Gamma_{10} \Gamma_{n,n+1} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{n-1} \exp(-2s\tau_{[n/2]}) + \right. \\ \left. - \Gamma_{10} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{s + (-1)^j a_2}{s+a_1} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{j-1} \exp(-2s\tau_{[j/2]}) + \right. \\ \left. - \Gamma_{n,n+1} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{s + (-1)^{i+1} a_2}{s+a_1} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{n-i-1} \exp(-2s\tau_{[(n-i)/2]}) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{(s + (-1)^{i+1} a_2)(s + (-1)^j a_2)}{(s+a_1)^2} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{j+i-1} \exp(-2s\tau_{[(j-i)/2]}) + \dots \right\},$$

$$T(s) = T_{10} T_{n+1,n} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{(n-1)/2} \exp(-s\tau_{[n/2]}).$$

$$\cdot \left\{ 1 + \Gamma_{10} \Gamma_{n,n+1} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{n-1} \exp(-2s\tau_{[n/2]}) + \right. \\ \left. - \Gamma_{n,n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{s + (-1)^{j+1} a_2}{s+a_1} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{n-j-1} \exp(-2s\tau_{[(n-j)/2]}) + \right. \\ \left. - \Gamma_{10} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s + (-1)^i a_2}{s+a_1} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{i-1} \exp(-2s\tau_{[i/2]}) + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(s + (-1)^i a_2)(s + (-1)^{j+1} a_2)}{(s+a_1)^2} \left(\frac{d}{(s+a_1)^2} \right)^{i-j-1} \exp(-2s\tau_{[(i-j)/2]}) + \dots \right\},$$

где

$$d = d_1 d_2 = \frac{4Y_1 Y_2}{C_d^2}, \quad \tau_{[n/2]} = \left[\frac{n}{2} \right] (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1 - (-1)^n}{2} \tau_1,$$

$$\tau_{[(i-j)/2]} = \left[\frac{i-j}{2} \right] (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1 - (-1)^{i-j}}{4} \left[(1 - (-1)^{j+1}) \tau_1 + (1 + (-1)^{j+1}) \tau_2 \right],$$

$$\tau_{[(i-j)/2] + [(p-q)/2]} = \tau_{[(i-j)/2]} + \tau_{[(p-q)/2]},$$

а $[n/2]$ означает целую часть от $n/2$.

При входном сигнале (2.1) аналитическая модель для вычисления временного отклика в начале структуры

$$\begin{aligned}
 V_R(t) = V_{\text{ino}} & \left\{ \frac{\Gamma_{01}}{t_r} [tU(t) - (t-t_r)U(t-t_r)] + \frac{T_{01}T_{10}}{t_r} \left[\Gamma_{n,n+1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{n-1} R_{\text{tr}}(2n-2, x_{[n/2]}) - \right. \right. \\
 & - \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{m-1} \left(R_{\text{tr}}(2m-2, x_{[m/2]}) - \frac{\Delta a_m}{a_1} R_{\text{tr}}(2m-1, x_{[m/2]}) \right) + \\
 & \quad + \Gamma_{10} \Gamma_{n,n+1}^2 \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{2n-2} R_{\text{tr}}(4n-4, x_{[n/2]}) - \\
 & \quad - \Gamma_{10} \Gamma_{n,n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{n+j-2} \left(R_{\text{tr}}(2(n+j)-4, x_{[n/2]+[j/2]}) - \right. \\
 & \quad \quad \left. - \frac{\Delta a_j}{a_1} R_{\text{tr}}(2(n+j)-3, x_{[n/2]+[j/2]}) \right) - \\
 & \quad - \Gamma_{n,n+1}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{2n-i-2} \left(R_{\text{tr}}(2(2n-i)-4, x_{[n/2]+[(n-i)/2]}) - \right. \\
 & \quad \quad \left. - \frac{\Delta a_{i+1}}{a_1} R_{\text{tr}}(2(2n-i)-3, x_{[n/2]+[(n-i)/2]}) \right) - \\
 & \quad - \Gamma_{10} \Gamma_{n,n+1} \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{n+m-2} \left(R_{\text{tr}}(2(n+m)-4, x_{[n/2]+[m/2]}) - \right. \\
 & \quad \quad \left. - \frac{\Delta a_m}{a_1} R_{\text{tr}}(2(n+m)-3, x_{[n/2]+[m/2]}) \right) + \\
 & \quad + \Gamma_{n,n+1} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{n+j-i-2} \left(R_{\text{tr}}(2(n+j-i)-4, x_{[n/2]+[(j-i)/2]}) - \right. \\
 & \quad \quad - \frac{\Delta a_{i+1} + \Delta a_j}{a_1} R_{\text{tr}}(2(n+j-i)-3, x_{[n/2]+[(j-i)/2]}) + \\
 & \quad \quad \left. + \frac{\Delta a_{i+1} \Delta a_j}{a_1^2} R_{\text{tr}}(2(n+j-i)-2, x_{[n/2]+[(j-i)/2]}) \right) + \\
 & \quad + \Gamma_{n,n+1} \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{n+m-i-2} \left(R_{\text{tr}}(2(n+m-i)-4, x_{[m/2]+[(n-i)/2]}) - \right. \\
 & \quad \quad - \frac{\Delta a_{i+1} + \Delta a_m}{a_1} R_{\text{tr}}(2(n+m-i)-3, x_{[m/2]+[(n-i)/2]}) + \\
 & \quad \quad \left. + \frac{\Delta a_{i+1} \Delta a_m}{a_1^2} R_{\text{tr}}(2(n+m-i)-2, x_{[m/2]+[(n-i)/2]}) \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Gamma_{10} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{m+j-2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j)-4, x_{[j/2]+[m/2]}) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Delta a_j + \Delta a_m}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j)-3, x_{[j/2]+[m/2]}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\Delta a_j \Delta a_m}{a_1^2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n+j-i)-2, x_{[j/2]+[m/2]}) \right) + \\
 & + \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{m+j-i-2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j-i)-4, x_{[(j-i)/2]+[m/2]}) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Delta a_m + \Delta a_j + \Delta a_{i+1}}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j-i)-3, x_{[(j-i)/2]+[m/2]}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\Delta a_m \Delta a_{i+1} + \Delta a_m \Delta a_j + \Delta a_{i+1} \Delta a_j}{a_1^2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j-i)-2, x_{[(j-i)/2]+[m/2]}) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Delta a_m \Delta a_{i+1} \Delta a_j}{a_1^3} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j-i)-1, x_{[(j-i)/2]+[m/2]}) \right) \Bigg\},
 \end{aligned}$$

а аналитическая модель для вычисления отклика в конце структуры

$$\begin{aligned}
 V_T(t) &= \frac{V_{\text{in}}}{t_r} T_{10} T_{n+1,n} \left\{ \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{(n-1)/2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n-1, x_{[n/2]}) - \right. \\
 & - \Gamma_{n,n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{[3(n-1)-2j]/2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(3n-2(j+1)-1, x_{[(n-j)/2]+[n/2]}) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Delta a_{j+1}}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(3n-2(j+1), x_{[(n-j)/2]+[n/2]}) \right) + \\
 & + \Gamma_{10} \Gamma_{n,n+1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{3(n-1)/2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(3(n-1), x_{[n/2]+[n/2]}) - \\
 & - \Gamma_{10} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{[n+2(i-1)-1]/2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(i-1)-1, x_{[i/2]+[n/2]}) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Delta a_i}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(i-1), x_{[i/2]+[n/2]}) \right) + \\
 & + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{[n+2(i-j-1)-1]/2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(i-j-1)-1, x_{[(i-j)/2]+[n/2]}) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Delta a_i + \Delta a_{j+1}}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(i-j-1), x_{[(i-j)/2]+[n/2]}) \right) +
 \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1}}{a_1^2} R_{tr} \left(n + 2(i - j - 1) + 1, x_{[(i-j)/2] + [n/2]} \right) \right\},$$

где

$$R_{tr}(n, x) = \frac{1}{a_1} (xP(n, x) - x_r P(n, x_r)) - \frac{n}{a_1} (P(n+1, x) - P(n+1, x_r)),$$

$$R_{tr}(0, x) = \frac{x}{a_1} U\left(\frac{x}{a_1}\right) - \frac{x_r}{a_1} U\left(\frac{x_r}{a_1}\right) = tU(t) - (t - t_r)U(t - t_r),$$

$$x_{[(i-j)/2]} = a_1(t - 2\tau_{[(i-j)/2]}),$$

$$x_{[n/2]} = a_1(t - \tau_{[n/2]}), \quad x_{[n/2]} = a_1(t - 2\tau_{[n/2]}),$$

$$x_{[i/2] + [m/2]} = a_1(t - 2(\tau_{[i/2]} + \tau_{[m/2]})),$$

$$x_{[(i-j)/2] + [n/2]} = a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + \tau_{[n/2]})),$$

$$\Delta a_i = a_1 - (-1)^i a_2$$

(здесь $P(n, x)$ – неполная гамма функция,

$$P(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}, \quad P(0, x) = 1,$$

$U(t)$ – единичный скачок, $x_r = x - a_1 t_r$, а $[n/2]$ означает целую часть от $n/2$).

Уточнённые модели для отклика на конце периодической структуры из нечетного числа последовательно соединенных отрезков линии передачи

Временной отклик на конце структуры, представляет собой сумму составляющих отклика

$$V_T(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + \dots,$$

где

$V_1(t)$ – проходящая волна;

$V_2(t)$ – составляющая, компоненты которой испытывают 2 отражения;

$V_3(t)$ – составляющая, компоненты которой испытывают 4 отражения;

$V_4(t)$ – составляющая, компоненты которой испытывают 6 отражений.

Временной отклик получается обратным преобразованием Лапласа частотного отклика

$$V_T(s) = V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) + V_4(s) + \dots,$$

где

$V_1(s) = V_{in}(s)T1(s)$ – составляющая, учитывающая проходящую волну;

$V_2(s) = V_{in}(s)T2(s)$ – составляющая, компоненты которой испытывают 2 отражения;

$V_3(s) = V_{in}(s)T3(s)$ – составляющая, компоненты которой испытывают 4 отражения;

$V_4(s) = V_{in}(s)T4(s)$ – составляющая, компоненты которой испытывают 6 отражений;

$T1(s), T2(s), T3(s), T4(s)$ – коэффициенты передачи составляющих, компоненты которых испытывают 0, 2, 4, 6 отражений.

В аналитической модели работы [140] временной отклик на конце структуры $V_T(t)=V_1(t)+V_2(t)$ учитывает только проходящую волну и составляющие, компоненты которой испытывают 2 отражения. При большой разности характеристических импедансов отрезков линии передачи необходим учёт дополнительных составляющих отклика. Поэтому, с помощью того же подхода [140], получена формула для составляющей отклика, компоненты которой испытывают 4 отражения [162].

Главной особенностью используемого подхода является то, что для получения временного отклика в аналитическом виде используется неполная гамма функция. Коэффициенты передачи составляющих в частотной области, в которых выделены множители, представляющие собой подынтегральные выражения для неполной гамма функции, будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 T1(s) &= T_{10}T_{01}\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp(-s\tau_{[n/2]}), \\
 T2(s) &= T_{10}T_{01}\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp(-s\tau_{[n/2]})\left(\Gamma_{01}^2\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{n-1} \exp(-2s\tau_{[n/2]})+\right. \\
 &\quad + \Gamma_{01}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{s+(-1)^{j+1}a_2}{s+a_1}\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{n-j-1} \exp(-2s\tau_{[(n-j)/2]})+ \\
 &\quad + \Gamma_{01}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{s+(-1)^i a_2}{s+a_1}\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{i-1} \exp(-2s\tau_{[i/2]})+ \\
 &\quad \left. + \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(s+(-1)^i a_2)(s+(-1)^{j+1} a_2)}{(s+a_1)^2}\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{i-j-1} \exp(-2s\tau_{[(i-j)/2]})\right), \\
 T3(s) &= T_{01}T_{10}\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp(-s\tau_{[n/2]})\left(\Gamma_{01}^4\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{2(n-1)} \exp(-2s\tau_{[n/2]})+\right. \\
 &\quad + \Gamma_{01}^3\sum_{i=1}^{n-1}\frac{s+(-1)^i a_2}{s+a_1}\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{i-1+n-1} \exp(-2s(\tau_{[i/2]} + \tau_{[n/2]}))+ \\
 &\quad + \Gamma_{01}^3\sum_{j=1}^{n-1}\frac{s+(-1)^{j+1} a_2}{s+a_1}\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{n-1-j+n-1} \exp(-2s(\tau_{[(n-j)/2]} + \tau_{[n/2]}))+ \\
 &\quad \left. + \Gamma_{01}^3\sum_{p=1}^{n-1}\frac{s+(-1)^p a_2}{s+a_1}\left(\frac{d}{(s+a_1)^2}\right)^{p-1+n-1} \exp(-2s(\tau_{[p/2]} + \tau_{[n/2]}))+\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Gamma_{01}^3 \sum_{q=1}^{n-1} \frac{s + (-1)^{q+1} a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{n-q-1+n-1} \exp(-2s(\tau_{[(n-q)/2]} + \tau_{[n/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{s + (-1)^i a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{j+1} a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{i-1-j+n-1} \exp(-2s(\tau_{[(i-j)/2]} + \tau_{[n/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{s + (-1)^i a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^p a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{i-1+p-1} \exp(-2s(\tau_{[i/2]} + \tau_{[p/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{s + (-1)^i a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{q+1} a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{i-1-q+n-1} \exp(-2s(\tau_{[(n-q)/2]} + \tau_{[i/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{p=j+1}^{n-1} \frac{s + (-1)^{j+1} a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^p a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{p-1-j+n-1} \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(-2s(\tau_{[(n-j)/2]} + \tau_{[p/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{s + (-1)^{j+1} a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{q+1} a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{n-1-j+n-1-q} \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(-2s(\tau_{[(n-j)/2]} + \tau_{[(n-q)/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{s + (-1)^p a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{q+1} a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{n-1+p-1-q} \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(-2s(\tau_{[(p-q)/2]} + \tau_{[n/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p=j+1}^{n-1} \frac{s + (-1)^i a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{j+1} a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^p a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{i-1-j+p-1} \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(-2s(\tau_{[(i-j)/2]} + \tau_{[p/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{s + (-1)^i a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^p a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{q+1} a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{i-1+p-1-q} \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(-2s(\tau_{[(p-q)/2]} + \tau_{[i/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{n-1} \frac{s + (-1)^i a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{j+1} a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{q+1} a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{n-1-q+i-1-j} \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(-2s(\tau_{[(i-j)/2]} + \tau_{[(n-q)/2]})) + \\
 & + \Gamma_{01} \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{p=j+1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{s + (-1)^{j+1} a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^p a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{q+1} a_2}{s + a_1} \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{n-1-j+p-1-q} \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(-2s(\tau_{[(n-j)/2]} + \tau_{[(p-q)/2]})) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p=j+1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{s + (-1)^i a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{j+1} a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^p a_2}{s + a_1} \cdot \frac{s + (-1)^{q+1} a_2}{s + a_1} \cdot \left(\frac{d}{(s + a_1)^2} \right)^{i-1-j+p-1-q} \exp(-2s(\tau_{[(i-j)/2]} + \tau_{[(p-q)/2]})),$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{01} = -\Gamma_{10} = \Gamma_{n+1,n} = -\Gamma_{n,n+1} &= \frac{Y_0 - Y_1}{Y_0 + Y_1}, \\ T_{01} = T_{n+1,n} &= \frac{2Y_1}{Y_0 + Y_1}, & T_{10} = T_{n,n+1} &= \frac{2Y_0}{Y_0 + Y_1}, \\ a_1 &= \frac{Y_1 + Y_2}{C_d}, & a_2 &= \frac{Y_1 - Y_2}{C_d}, \\ d_1 &= \frac{2Y_1}{C_d}, & d_2 &= \frac{2Y_2}{C_d}, & d &= d_1 d_2. \end{aligned}$$

Используя коэффициенты передачи в частотной области, найдем отклик в частотной области. Применяя обратное преобразование Лапласа и используя свойства неполной гамма функции, получим временной отклик в аналитическом виде, учитывающий дополнительную составляющую $V_3(t)$, компоненты которой испытывают 4 отражения. Окончательные аналитические модели для вычисления составляющих временного отклика $V_1(t)$, $V_2(t)$ и $V_3(t)$:

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{V_{ino}}{t_r} T_{01} T_{10} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} R_{tr}(n-1, x_1), \\ V_2(t) &= \frac{V_{ino}}{t_r} T_{01} T_{10} \left\{ \Gamma_{01} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{3(n-1)-2j}{2}} (R_{tr}(3n-2(j+1)-1, x_2) - \right. \\ &- \frac{\Delta a_{j+1}}{a_1} R_{tr}(3n-2(j+1), x_2)) + \Gamma_{01}^2 \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{3(n-1)}{2}} R_{tr}(3(n-1), x_3) + \\ &+ \Gamma_{01} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n+2(i-1)-1}{2}} \left(R_{tr}(n+2(i-1)-1, x_4) - \frac{\Delta a_i}{a_1} R_{tr}(n+2(i-1), x_4) \right) + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n+2(i-j-1)-1}{2}} R_{tr}(n+2(i-j-1)-1, x_5) - \\ &\left. - \frac{\Delta a_i + \Delta a_{j+1}}{a_1} R_{tr}(n+2(i-j-1), x_5) + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1}}{a_1^2} R_{tr}(n+2(i-j-1)+1, x_5) \right) \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V3(t) = & \frac{V_{ino}}{t_r} T_{01} T_{10} \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p=j+1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-1+2(i-j+p-q-2)}{2}} \right. \\
 & \left[R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2)-1, x_6) - \right. \\
 & - \frac{\Delta a_i + \Delta a_{j+1} + \Delta a_p + \Delta a_{q+1}}{a_1} R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2), x_6) + \\
 & + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1} + \Delta a_i \Delta a_p + \Delta a_i \Delta a_{q+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_p + \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1} + \Delta a_p \Delta a_{q+1}}{a_1^2} \\
 & \cdot R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2)+1, x_6) - \\
 & - \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_p + \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1} + \Delta a_i \Delta a_p \Delta a_{q+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1}}{a_1^3} \\
 & \cdot R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2)+2, x_6) + \\
 & \left. + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1}}{a_1^4} R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2)+3, x_6) \right] + \\
 & + \Gamma_{01}^3 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{3(n-1)+2(i-1)}{2}} \left(R_{tr}(3n+2(i-1)-3, x_7) - \frac{\Delta a_i}{a_1} R_{tr}(3n+2(i-1)-2, x_7) \right) + \\
 & + \Gamma_{01}^3 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{5(n-1)-2j}{2}} \left(R_{tr}(5n-2j-5, x_8) - \frac{\Delta a_{j+1}}{a_1} R_{tr}(5n-2j-4, x_8) \right) + \\
 & + \Gamma_{01}^3 \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{3(n-1)+2(p-1)}{2}} \left(R_{tr}(3n+2(p-1)-3, x_9) - \frac{\Delta a_p}{a_1} R_{tr}(3n+2(p-1)-2, x_9) \right) + \\
 & + \Gamma_{01}^3 \sum_{q=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{5(n-1)-2q}{2}} \left(R_{tr}(5n-2q-5, x_{10}) - \frac{\Delta a_{q+1}}{a_1} R_{tr}(5n-2q-4, x_{10}) \right) + \\
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{3(n-1)+2(i-j-1)}{2}} \left(R_{tr}(3n+2(i-j)-5, x_{11}) - \right. \\
 & - \frac{\Delta a_i + \Delta a_{j+1}}{a_1} R_{tr}(3n+2(i-j)-4, x_{11}) + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1}}{a_1^2} R_{tr}(3n+2(i-j)-3, x_{11}) \left. \right) + \\
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-1+2(p+i-2)}{2}} \left(R_{tr}(n+2(i+p)-5, x_{12}) - \right. \\
 & - \frac{\Delta a_i + \Delta a_p}{a_1} R_{tr}(n+2(i+p)-4, x_{12}) + \frac{\Delta a_i \Delta a_p}{a_1^2} R_{tr}(n+2(i+p)-3, x_{12}) \left. \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{3(n-1)+2(i-q-1)}{2}} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(3n+2(i-q)-5, x_{13}) - \right. \\
 & - \frac{\Delta a_i + \Delta a_{q+1}}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(3n+2(i-q)-4, x_{13}) + \left. \frac{\Delta a_i \Delta a_{q+1}}{a_1^2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(i-q)-3, x_{13}) \right) + \\
 & + \Gamma_{01}^4 \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{5(n-1)}{2}} \mathbf{R}_{\text{tr}}(5(n-1), x_{14}) + \\
 & + \Gamma_{01}^2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{p=j+1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{3(n-1)+2(p-j-1)}{2}} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(3n+2(p-j)-5, x_{15}) - \right. \\
 & - \frac{\Delta a_{j+1} + \Delta a_p}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(3n+2(p-j)-4, x_{15}) + \\
 & + \Gamma_{01} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p=j+1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n+2(p+i-j)-5}{2}} \left[\mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(p+i-j)-5, x_{18}) - \right. \\
 & - \frac{\Delta a_i + \Delta a_{j+1} + \Delta a_p}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(p+i-j)-4, x_{18}) + \\
 & + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_p + \Delta a_p \Delta a_i}{a_1^2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(p+i-j)-3, x_{18}) - \\
 & \left. - \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_p}{a_1^3} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(p+i-j)-2, x_{18}) \right] + \\
 & + \Gamma_{01} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{q=1}^{p-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n+2(p+i-q)-5}{2}} \left[\mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(p+i-q)-5, x_{19}) - \right. \\
 & - \frac{\Delta a_i + \Delta a_p + \Delta a_{q+1}}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(p+i-q)-4, x_{19}) + \\
 & + \frac{\Delta a_i \Delta a_p + \Delta a_p \Delta a_{q+1} + \Delta a_{q+1} \Delta a_i}{a_1^2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(p+i-q)-3, x_{19}) - \\
 & \left. - \frac{\Delta a_i \Delta a_p \Delta a_{q+1}}{a_1^3} \mathbf{R}_{\text{tr}}(n+2(p+i-q)-2, x_{19}) \right] + \\
 & + \Gamma_{01} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{3n+2(i-q-j)-5}{2}} \left[\mathbf{R}_{\text{tr}}(3n+2(i-q-j)-5, x_{20}) - \right. \\
 & - \frac{\Delta a_i + \Delta a_{j+1} + \Delta a_{q+1}}{a_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(3n+2(i-q-j)-4, x_{20}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1} + \Delta a_{q+1} \Delta a_i}{a_1^2} R_{tr}(3n + 2(i - q - j) - 3, x_{20}) - \\
 & \quad - \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1}}{a_1^3} R_{tr}(3n + 2(i - q - j) - 2, x_{20}) \Big] + \\
 & + \Gamma_{01} \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{p=j+1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{3n+2(p-j-q)-5}{2}} \left[R_{tr}(3n + 2(p - j - q) - 5, x_{21}) - \right. \\
 & \quad - \frac{\Delta a_{j+1} + \Delta a_p + \Delta a_{q+1}}{a_1} R_{tr}(3n + 2(p - j - q) - 4, x_{21}) + \\
 & + \frac{\Delta a_{j+1} \Delta a_p + \Delta a_p \Delta a_{q+1} + \Delta a_{q+1} \Delta a_{j+1}}{a_1^2} R_{tr}(3n + 2(p - j - q) - 3, x_{21}) - \\
 & \quad \left. - \frac{\Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1}}{a_1^3} R_{tr}(3n + 2(p - j - q) - 2, x_{21}) \right] \Big\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 T_{01} &= \frac{2Y_1}{Y_0 + Y_1}, & T_{10} &= \frac{2Y_0}{Y_0 + Y_1}, & \Gamma_{01} &= \frac{Y_0 - Y_1}{Y_0 + Y_1}, \\
 a_1 &= \frac{Y_1 + Y_2}{Cd}, & a_2 &= \frac{Y_1 - Y_2}{Cd}, & d &= \frac{4Y_1 Y_2}{Cd^2}, \\
 \Delta a_i &= a_1 - (-1)^i a_2,
 \end{aligned}$$

$$R_{tr}(n, x) = \frac{1}{a_1} [xP(n, x) - x_r P(n, x_r)] - \frac{n}{a_1} [P(n + 1, x) - P(n + 1, x_r)],$$

$$R_{tr}(0, x) = tU(t) - (t - t_r)U(t - t_r),$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_1(t - \tau_{[n/2]}), & x_2 &= a_1(t - (2\tau_{[(n-j)/2]} + \tau_{[n/2]})), \\
 x_3 &= a_1(t - 3\tau_{[n/2]}), & x_4 &= a_1(t - (2\tau_{[i/2]} + \tau_{[n/2]})), \\
 x_5 &= a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + \tau_{[n/2]})), & x_6 &= a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + 2\tau_{[(p-q)/2]} + \tau_{[n/2]})), \\
 x_7 &= a_1(t - (2\tau_{[i/2]} + 3\tau_{[n/2]})), & x_8 &= a_1(t - (2\tau_{[(n-j)/2]} + 3\tau_{[n/2]})), \\
 x_9 &= a_1(t - (2\tau_{[p/2]} + 3\tau_{[n/2]})), & x_{10} &= a_1(t - (2\tau_{[(n-q)/2]} + 3\tau_{[n/2]})), \\
 x_{11} &= a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + 3\tau_{[n/2]})), & x_{12} &= a_1(t - (2\tau_{[i/2]} + 2\tau_{[p/2]} + \tau_{[n/2]})), \\
 x_{13} &= a_1(t - (2\tau_{[i/2]} + 2\tau_{[(n-q)/2]} + \tau_{[n/2]})), & x_{14} &= a_1(t - 5\tau_{[n/2]}), \\
 x_{15} &= a_1(t - (2\tau_{[(n-j)/2]} + 2\tau_{[p/2]} + \tau_{[n/2]})), & x_{16} &= a_1(t - (2\tau_{[(n-j)/2]} + 2\tau_{[(n-q)/2]} + \tau_{[n/2]})), \\
 x_{17} &= a_1(t - (2\tau_{[(n-q)/2]} + 3\tau_{[n/2]})), & x_{18} &= a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + 2\tau_{[p/2]} + \tau_{[n/2]})), \\
 x_{19} &= a_1(t - (2\tau_{[i/2]} + 2\tau_{[(p-q)/2]} + \tau_{[n/2]})), & x_{20} &= a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + 2\tau_{[(n-q)/2]} + \tau_{[n/2]})), \\
 x_{21} &= a_1(t - (2\tau_{[(n-j)/2]} + 2\tau_{[(p-q)/2]} + \tau_{[n/2]})),
 \end{aligned}$$

(здесь

$$P(n, x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}, \quad P(0, x) = 1, \quad x_r = x - a_1 t_r,$$

$$\tau_{[n/2]} = \left[\frac{n}{2} \right] (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1 - (-1)^n}{2} \tau_1,$$

$$\tau_{[(i-j)/2]} = \left[\frac{i-j}{2} \right] (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1 - (-1)^{i-j}}{4} \left[(1 - (-1)^{j+1}) \tau_1 + (1 + (-1)^{j+1}) \tau_2 \right],$$

а $[n/2]$ – означает целую часть от $n/2$).

Аналогичным образом можно получить аналитическое выражение для дополнительной составляющей отклика, компоненты которой испытывают 6 отражений. Оно получается очень громоздким, но может быть гораздо проще в случае согласованной структуры, т.е. когда равны характеристические адмиттансы входной линии передачи и первого отрезка линии передачи ($Y_0=Y_1$) и характеристические адмиттансы последнего отрезка линии передачи и выходной линии передачи ($Y_n=Y_{n+1}$) [163].

Коэффициенты передачи составляющих отклика в частотной области для согласованной структуры будут иметь следующий вид:

$$T1(s) = \prod_{m=0}^n T_{m+1,m} \exp\left(-s \sum_{k=1}^n \tau_k\right),$$

$$T2(s) = \prod_{m=0}^n T_{m+1,m} \exp\left(-s \sum_{k=1}^n \tau_k\right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \Gamma_{i,i+1} \Gamma_{j+1,j} \prod_{k=j+1}^{i-1} (T_{k,k+1} T_{k+1,k}) \exp\left(-2s \sum_{k=j+1}^i \tau_k\right) \right),$$

$$T3(s) = \prod_{m=0}^n T_{m+1,m} \exp\left(-s \sum_{k=1}^n \tau_k\right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{p=j+1}^n \sum_{q=0}^{p-1} \Gamma_{i,i+1} \Gamma_{j+1,j} \Gamma_{p,p+1} \Gamma_{q+1,q} \cdot \right.$$

$$\cdot \prod_{k=q+1}^{i-1} (T_{k,k+1} T_{k+1,k}) \prod_{k=q+1}^{p-1} (T_{k,k+1} T_{k+1,k}) \exp\left(-2s \left(\sum_{k=j+1}^i \tau_k + \sum_{k=q+1}^p \tau_k \right) \right) \Bigg),$$

$$T4(s) = \prod_{m=0}^n T_{m+1,m} \exp\left(-s \sum_{k=1}^n \tau_k\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{p=j+1}^n \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{h=q+1}^n \sum_{f=0}^{h-1} \Gamma_{i,i+1} \Gamma_{j+1,j} \Gamma_{p,p+1} \Gamma_{q+1,q} \Gamma_{h,h+1} \Gamma_{f+1,f} \cdot \right.$$

$$\cdot \prod_{k=q+1}^{i-1} (T_{k,k+1} T_{k+1,k}) \prod_{k=q+1}^{p-1} (T_{k,k+1} T_{k+1,k}) \prod_{k=f+1}^{h-1} (T_{k,k+1} T_{k+1,k}) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-2s \left(\sum_{k=j+1}^i \tau_k + \sum_{k=q+1}^p \tau_k + \sum_{k=f+1}^h \tau_k \right) \right) \Bigg),$$

где

$$\Gamma_{i,i+1} = \frac{Y_i - sC_i - Y_{i+1}}{Y_i + sC_i + Y_{i+1}}, \quad \Gamma_{i+1,i} = \frac{Y_{i+1} - sC_i - Y_i}{Y_i + sC_i + Y_{i+1}} = -\Gamma_{i,i+1} - 2 \frac{sC_i}{Y_i + sC_i + Y_{i+1}},$$

$$T_{i+1,i} = 1 + \Gamma_{i,i+1} = \frac{2Y_i}{Y_i + sC_i + Y_{i+1}}, \quad T_{i,i+1} = 1 + \Gamma_{i+1,i} = \frac{2Y_{i+1}}{Y_i + sC_i + Y_{i+1}}.$$

Используя коэффициенты передачи составляющих в частотной области, найдем отклик в частотной области. Применяя обратное преобразование Лапла-

са и используя свойства неполной гамма функции, получим временной отклик в аналитическом виде, учитывающий дополнительную составляющую $V_4(t)$, компоненты которой испытывают 6 отражений. Окончательные аналитические модели для вычисления составляющих временного отклика $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$ и $V_4(t)$:

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \frac{V_{ino}}{t_r} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} R_{tr}(n-1, x_1), \\
 V_2(t) &= \frac{V_{ino}}{t_r} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n+2(i-j-1)-1}{2}} \cdot \\
 &\cdot \left\{ R_{tr}(n+2(i-j-1)-1, x_2) - \frac{\Delta a_i + \Delta a_{j+1}}{a_1} R_{tr}(n+2(i-j-1), x_2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1}}{a_1^2} R_{tr}(n+2(i-j-1)+1, x_2) \right\}, \\
 V_3(t) &= \frac{V_{ino}}{t_r} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p=j+1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-1+2(i-j+p-q-2)}{2}} \cdot \\
 &\cdot \left\{ R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2)-1, x_3) - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{a_1} (\Delta a_i + \Delta a_{j+1} + \Delta a_p + \Delta a_{q+1}) R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2), x_3) + \\
 &\quad + \frac{1}{a_1^2} (\Delta a_i \Delta a_{j+1} + \Delta a_i \Delta a_p + \Delta a_i \Delta a_{q+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_p + \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1} + \Delta a_p \Delta a_{q+1}) \cdot \\
 &\quad \cdot R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2)+1, x_3) - \\
 &\quad - \frac{1}{a_1^3} (\Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_p + \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1} + \Delta a_i \Delta a_p \Delta a_{q+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1}) \cdot \\
 &\quad \cdot R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2)+2, x_3) + \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1}}{a_1^4} R_{tr}(n+2(i-j+p-q-2)+3, x_3) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V4(t) = & \frac{V_{ino}}{t_r} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p=j+1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{h=q+1}^{n-1} \sum_{f=1}^{h-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{(n-1+2(i-j+p-q+h-f-3))/2} \cdot \\
 & \cdot \left\{ R_{tr}(n-1+2(i-j+p-q+h-f-3), x_4) - \right. \\
 - & \frac{\Delta a_i + \Delta a_{j+1} + \Delta a_p + \Delta a_{q+1} + \Delta a_h + \Delta a_{f+1}}{a_1} R_{tr}(n+2(i-j+p-q+h-f-3), x_4) + \\
 + & \frac{1}{a_1^2} (\Delta a_h \Delta a_{f+1} + \Delta a_h \Delta a_p + \Delta a_h \Delta a_{q+1} + \Delta a_h \Delta a_{j+1} + \Delta a_h \Delta a_i + \Delta a_{f+1} \Delta a_p + \\
 & + \Delta a_{f+1} \Delta a_{q+1} + \Delta a_{f+1} \Delta a_{j+1} + \Delta a_{f+1} \Delta a_i + \Delta a_p \Delta a_{q+1} + \\
 & + \Delta a_{j+1} \Delta a_p + \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1} + \Delta a_i \Delta a_p + \Delta a_i \Delta a_{q+1} + \Delta a_i \Delta a_{j+1}) \cdot \\
 & \cdot R_{tr}(n+1+2(i-j+p-q+h-f-3), x_4) - \\
 - & \frac{1}{a_1^3} (\Delta a_h \Delta a_{f+1} \Delta a_p + \Delta a_h \Delta a_{f+1} \Delta a_{q+1} + \Delta a_h \Delta a_{f+1} \Delta a_{j+1} + \Delta a_h \Delta a_{f+1} \Delta a_i + \\
 & + \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_h + \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_{f+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_h + \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{f+1} + \\
 & + \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1} \Delta a_h + \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1} \Delta a_{f+1} + \Delta a_i \Delta a_p \Delta a_h + \Delta a_i \Delta a_p \Delta a_{f+1} + \\
 & + \Delta a_i \Delta a_{q+1} \Delta a_h + \Delta a_i \Delta a_{q+1} \Delta a_{f+1} + \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_h + \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_{f+1} + \\
 & + \Delta a_p \Delta a_i \Delta a_{j+1} + \Delta a_{q+1} \Delta a_i \Delta a_{j+1} + \\
 & + \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1} + \Delta a_i \Delta a_p \Delta a_{q+1}) R_{tr}(n+2+2(i-j+p-q+h-f-3), x_4) + \\
 + & \frac{1}{a_1^4} (\Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_{q+1} \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \\
 & + \Delta a_i \Delta a_p \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \Delta a_i \Delta a_{q+1} \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \\
 & + \Delta a_p \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_h + \Delta a_p \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_{f+1} + \Delta a_{q+1} \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_h + \\
 & + \Delta a_{q+1} \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_{f+1} + \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_h + \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_{f+1} + \\
 & + \Delta a_i \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_h + \Delta a_i \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_{f+1} + \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1}) \cdot \\
 & \cdot R_{tr}(n+2+2(i-j+p-q+h-f-3), x_4) - \\
 - & \frac{1}{a_1^5} (\Delta a_p \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \Delta a_{q+1} \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \\
 + & \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \Delta a_i \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_h \Delta a_{f+1} + \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_h + \\
 + & \Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_{f+1}) R_{tr}(n-1+2(i-j+p-q+h-f-3), x_4) + \\
 + & \frac{1}{a_1^6} (\Delta a_i \Delta a_{j+1} \Delta a_p \Delta a_{q+1} \Delta a_h \Delta a_{f+1}) R_{tr}(n-1+2(i-j+p-q+h-f-3), x_4) \left. \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$a_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{Cd}, \quad a_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{Cd}, \quad d = \frac{4Y_1 Y_2}{Cd^2}, \quad \Delta a_i = a_1 - (-1)^i a_2,$$

$$R_{tr}(n, x) = \frac{1}{a_1} [xP(n, x) - x_r P(n, x_r)] - \frac{n}{a_1} [P(n+1, x) - P(n+1, x_r)],$$

$$R_{tr}(0, x) = tU(t) - (t - t_r)U(t - t_r),$$

$$x_1 = a_1(t - \tau_{[n/2]}),$$

$$x_2 = a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + \tau_{[n/2]})),$$

$$x_3 = a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + 2\tau_{[(p-q)/2]} + \tau_{[n/2]})),$$

$$x_4 = a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + 2\tau_{[(p-q)/2]} + 2\tau_{[(h-f)/2]} + \tau_{[n/2]})),$$

(здесь

$$P(n, x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}, \quad P(0, x) = 1, \quad x_r = x - a_1 t_r,$$

$$\tau_{[n/2]} = \left[\frac{n}{2} \right] (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1 - (-1)^n}{2} \tau_1,$$

$$\tau_{[(i-j)/2]} = \left[\frac{i-j}{2} \right] (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1 - (-1)^{i-j}}{4} \left[(1 - (-1)^{j+1}) \tau_1 + (1 + (-1)^{j+1}) \tau_2 \right],$$

а $[n/2]$ – означает целую часть от $n/2$).

Периодическая структура из четного числа последовательно соединенных отрезков линии передачи

С помощью аналогичного подхода получена аналитическая модель [164] для отклика в начале и конце периодической структуры из четного числа последовательно соединенных отрезков линии передачи с емкостными нагрузками на стыках при $Y_0 \neq Y_{n+1}$ (рис. 3.3).

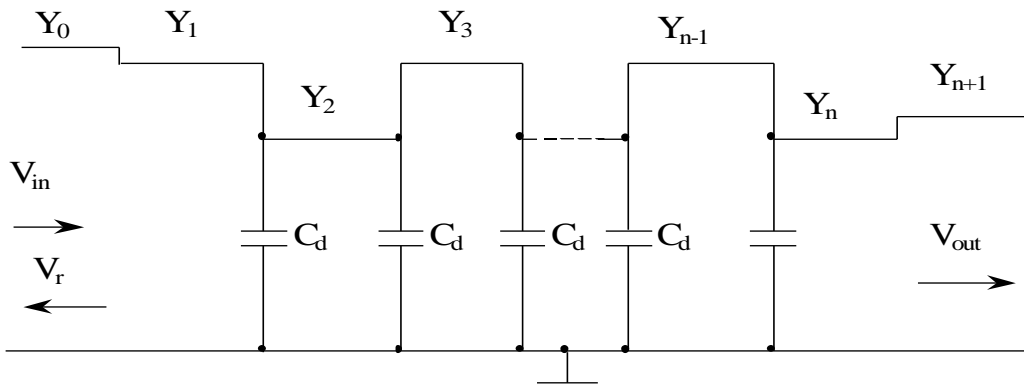


Рис. 3.3. Эквивалентная схема структуры из четного числа последовательно соединенных отрезков линии передачи с емкостными нагрузками на стыках

Аналитическая модель для вычисления отклика в конце структуры

$$\begin{aligned}
V_T(t) = & V_{in} T_{10} T_{n+1,n} \left\{ \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} R_{tr}(n-1, x_{[n/2]}) - \right. \\
& - \Gamma_{10} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-2}{2}+i-1} \left(R_{tr}(n+2(i-1)-1, x_{[n/2]'+[i/2]}) - \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\Delta a_i}{a_1} R_{tr}(n+2(i-1), x_{[n/2]'+[i/2]}) \right) - \right. \\
& - \Gamma_{n,n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-2}{2}+n-j-1} \left(R_{tr}(3n-2(j+1)-1, x_{[n/2]'+[(n-j)/2]}) - \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\Delta a_{j+1}}{a_1} R_{tr}(3n-2(j+1), x_{[n/2]'+[(n-j)/2]}) \right) + \right. \\
& + \Gamma_{n,n+1} \Gamma_{10} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-2}{2}+n-1} R_{tr}(3n-3, x_{[n/2]'+[n/2]}) + \\
& + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{\frac{n-2}{2}+i-j-1} \left[R_{tr}(n+2(i-j-1)-1, x_{[n/2]'+[(i-j)/2]}) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Delta a_i + \Delta a_{j+1}}{a_1} R_{tr}(n+2(i-j-1), x_{[n/2]'+[(i-j)/2]}) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\Delta a_i \Delta a_{j+1}}{a_1^2} R_{tr}(n+2(i-j-1)+1, x_{[n/2]'+[(i-j)/2]}) \right] \right\},
\end{aligned}$$

а аналитическая модель для вычисления отклика в начале структуры

$$\begin{aligned}
V_R(t) = & \Gamma_{01} V_{in}(t) - \frac{V_{in0}}{tr} T_{01} T_{10} \left[- \Gamma_{n,n+1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{n-1} R_{tr}(2n-2, x_{[n/2]}) - \right. \\
& \quad \left. - \Gamma_{10} (\Gamma_{n,n+1})^2 \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{2(n-1)} R_{tr}(4(n-1), x_{2[n/2]}) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{d}{a_1^2} \right)^{m-1} \left(R_{tr}(2m-2, x_{[m/2]}) - \frac{\Delta a_m}{a_1} R_{tr}(2m-1, x_{[m/2]}) \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Gamma_{n,n+1} \Gamma_{10} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}_1^2} \right)^{n+j-2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n+j)-4, \mathbf{x}_{[n/2]+[j/2]}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Delta \mathbf{a}_j}{\mathbf{a}_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n+j)-3, \mathbf{x}_{[n/2]+[j/2]}) \right) + \\
& + (\Gamma_{n,n+1})^2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}_1^2} \right)^{2n-i-2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(2(2n-i)-4, \mathbf{x}_{[n/2]+[(n-i)/2]}) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Delta \mathbf{a}_{i+1}}{\mathbf{a}_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(2n-i)-3, \mathbf{x}_{[n/2]+[(n-i)/2]}) \right) - \\
& - \Gamma_{n,n+1} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}_1} \right)^{n-i-2+j} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n-i+j)-4, \mathbf{x}_{[n/2]+[(j-i)/2]}) - \right. \\
& \quad - \frac{\Delta \mathbf{a}_{i+1} + \Delta \mathbf{a}_j}{\mathbf{a}_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n-i+j)-3, \mathbf{x}_{[n/2]+[(j-i)/2]}) + \\
& \quad \left. + \frac{\Delta \mathbf{a}_{i+1} \Delta \mathbf{a}_j}{\mathbf{a}_1^2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n-i+j)-2, \mathbf{x}_{[n/2]+[(j-i)/2]}) \right) + \\
& + \Gamma_{10} \Gamma_{n,n+1} \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}_1^2} \right)^{n+m-2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n+m)-4, \mathbf{x}_{[n/2]+[m/2]}) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Delta \mathbf{a}_m}{\mathbf{a}_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n+m)-3, \mathbf{x}_{[n/2]+[m/2]}) \right) - \\
& - \Gamma_{n,n+1} \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}_1} \right)^{n+m-i-2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n+m-i)-4, \mathbf{x}_{[m/2]+[(n-i)/2]}) - \right. \\
& \quad - \frac{\Delta \mathbf{a}_{i+1} + \Delta \mathbf{a}_m}{\mathbf{a}_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n+m-i)-3, \mathbf{x}_{[m/2]+[(n-i)/2]}) + \\
& \quad \left. + \frac{\Delta \mathbf{a}_{i+1} \Delta \mathbf{a}_m}{\mathbf{a}_1^2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(n+m-i)-2, \mathbf{x}_{[m/2]+[(n-i)/2]}) \right) + \\
& - \Gamma_{10} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}_1^2} \right)^{m+j-2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j)-4, \mathbf{x}_{[j/2]+[m/2]}) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Delta \mathbf{a}_j + \Delta \mathbf{a}_m}{\mathbf{a}_1} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j)-3, \mathbf{x}_{[j/2]+[m/2]}) + \frac{\Delta \mathbf{a}_j \Delta \mathbf{a}_m}{\mathbf{a}_1^2} \mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j)-2, \mathbf{x}_{[j/2]+[m/2]}) \right) + \\
& + \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}_1} \right)^{m+j-i-2} \left(\mathbf{R}_{\text{tr}}(2(m+j-i)-4, \mathbf{x}_{[(j-i)/2]+[m/2]}) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\Delta a_m + \Delta a_j + \Delta a_{i+1}}{a_1} R_{tr} \left(2(m+j-i) - 3, x_{[(j-i)/2] + [m/2]} \right) + \\ & + \frac{\Delta a_m \Delta a_{i+1} + \Delta a_m \Delta a_j + \Delta a_{i+1} \Delta a_j}{a_1^2} R_{tr} \left(2(m+j-i) - 2, x_{[(j-i)/2] + [m/2]} \right) + \\ & + \frac{\Delta a_m \Delta a_{i+1} \Delta a_j}{a_1^3} R_{tr} \left(2(m+j-i) - 1, x_{[(j-i)/2] + [m/2]} \right) \Bigg], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{10} &= \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0 + Y_1}, & \Gamma_{01} &= \frac{Y_0 - Y_1}{Y_0 + Y_1}, & \Gamma_{n,n+1} &= \frac{Y_n - Y_{n+1}}{Y_n + Y_{n+1}}, \\ T_{10} &= \frac{2Y_0}{Y_0 + Y_1}, & T_{01} &= \frac{2Y_1}{Y_0 + Y_1}, & T_{n+1,n} &= \frac{2Y_n}{Y_n + Y_{n+1}}, \\ a_1 &= \frac{Y_1 + Y_2}{C_d}, & a_2 &= \frac{Y_1 - Y_2}{C_d}, & \Delta a_i &= a_1 - (-1)^i a_2, \\ & & d &= \frac{4Y_1 Y_2}{C_d^2}, \end{aligned}$$

$$R_{tr}(n, x) = \frac{1}{a_1} [xP(n, x) - x_r P(n, x_r)] - \frac{n}{a_1} [P(n+1, x) - P(n+1, x_r)],$$

$$R_{tr}(0, x) = tU(t) - (t - t_r)U(t - t_r),$$

$$x_{[n/2]'} = a_1(t - \tau_{[n/2]}) \qquad x_{[n/2]} = a_1(t - 2\tau_{[n/2]})$$

$$x_{[i/2] + [m/2]} = a_1(t - 2(\tau_{[i/2]} + \tau_{[m/2]})) \qquad x_{[(i-j)/2]} = a_1(t - 2\tau_{[(i-j)/2]})$$

$$x_{[(i-j)/2] + [n/2]'} = a_1(t - (2\tau_{[(i-j)/2]} + \tau_{[n/2]})),$$

(здесь

$$P(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}, \quad P(0, x) = 1, \quad x_r = x - a_1 t_r,$$

$$\tau_{[n/2]} = \left[\frac{n}{2} \right] (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1 - (-1)^n}{2} \tau_1,$$

$$\tau_{[(i-j)/2]} = \left[\frac{i-j}{2} \right] (\tau_1 + \tau_2) + \frac{1 - (-1)^{i-j}}{2} [(1 - (-1)^{j+1})\tau_1 + (1 + (-1)^{j+1})\tau_2],$$

а $[m/2]$ означает целую часть $m/2$).

4. МЕЖСОЕДИНЕНИЯ МОНТАЖНЫХ ПЛАТ: ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В данном разделе сначала рассмотрены основные виды известных монтажных плат, проведён анализ их достоинств и недостатков, сформулированы основные требования, предъявляемые к современным монтажным платам, рассмотрена новая помехозащищённая теплопроводная монтажная плата (ПТМП), выполнена предварительная, качественная оценка её возможностей. Затем кратко рассмотрены особенности технологии изготовления ПТМП в условиях производства, касающиеся подложки, изолирующего слоя, металлической пластины и электрического контакта к металлической пластине. Описаны различные варианты изготовленных макетов межсоединений. Представлены результаты экспериментального моделирования распространения импульсного сигнала в одиночных межсоединениях и перекрёстных помех в парах связанных межсоединений.

4.1 Основные виды монтажных плат

Известно несколько основных видов монтажных плат и большое разнообразие их оригинальных модификаций (например, [165–167]), которые классифицируются по определённым признакам [168].

Навесной монтаж был одним из первых видов монтажа радиоэлементов, которые закреплялись на жёсткой пластине, например, металлическом "шасси" с изоляторами. Необходимые соединения между выводами в этом случае осуществлялись навесными проводниками путём ручной пайки. У такого способа монтажа много достоинств, например, наличие металлической пластины, которая служит одновременно радиатором и теплопроводом, а также электрическим экраном и общим проводником для сигнальных проводов. Элементы навесного монтажа, благодаря его простоте, применяются и по сей день для монтажа, например, крупногабаритных радиоэлементов. Однако такой способ монтажа явно устарел. Миниатюризация радиоэлементов и повышение плотности монтажа усложнили навесной монтаж и увеличили его трудоёмкость, потребовав новых конструктивно-технологических решений.

Пришло время печатного монтажа, начавшегося с односторонних печатных плат. Получение межсоединений травлением фольгированного диэлектрика оказалось очень дешёвым, особенно, при большой серийности производства, и в настоящее время повсеместно и хорошо освоено. Потребность более плотного размещения печатных проводников привела к двусторонним печатным платам (ДПП). Однако сплошное диэлектрическое основание вместо металлического ухудшило условия теплоотвода. Для улучшения электрических характеристик межсоединений быстродействующей элементной базы снова появилась необходимость в общей плоскости земли, ради которой приходится жертвовать одним слоем сигнальных проводников.

Дальнейший рост плотности монтажа потребовал увеличения числа слоёв печатной платы. Это привело к появлению многослойных печатных плат (МПП) с большим числом сигнальных слоёв, при необходимости, чередующихся со

слоями земли и питания. МПП позволила существенно продвинуться в решении проблемы неискажённой передачи сигналов в межсоединениях высокой плотности. Однако стоимость МПП высока и достигает десятикратной стоимости ДПП [169]. Это объясняется тем, что изготовление МПП – сложный многооперационный процесс, требующий строгого соблюдения технологических режимов с применением высококачественных материалов, специального высокоточного технологического оборудования и контрольно-измерительной аппаратуры.

Отдельно следует сказать о платах тонкопроводного монтажа, межсоединения которых осуществляются тонким изолированным проводом с помощью специальных станков с числовым программным управлением. Одной из самых современных технологий изготовления таких плат является технология Multiwire, позволяющая получить на двух слоях разводки плотность межсоединений эквивалентную двадцатислойной МПП [170]. Другими достоинствами являются открытый доступ к межсоединениям и простота их модификации или переразводки. Кроме того, здесь достигаются более высокие, чем в МПП, электрические характеристики межсоединений, поскольку все изолированные провода лежат в слое адгезива, находящемся на фольге или металлической пластине, выполняющих функцию электрической земли. Недостатком тонкопроводного монтажа является необходимость специальных станков и индивидуальная работа над каждой платой, что пока оставляет его довольно дорогим.

Рост требований к плотности монтажа и быстродействию современных электронных схем определяет развитие монтажных плат. Монтажная плата должна обеспечивать неискажённую передачу высокочастотных сигналов в межсоединениях высокой плотности, отвод тепла от корпусов радиоэлементов и межсоединений. Кроме того, важно контролировать влияние на монтажную плату внешних электромагнитных помех и сохранять в допустимых пределах уровень электромагнитных излучений самой платы. Существенным фактором остаётся снижение себестоимости монтажной платы.

Обзор монтажных плат и патентный поиск, проведённые автором, показали отсутствие конструкций монтажных плат, полностью отвечающих всем современным требованиям. Поэтому, поиск новых конструкций монтажных плат, обладающих достоинствами известных, остаётся весьма актуальной задачей, требующей своего решения.

4.2 Помехозащищённая теплопроводная монтажная плата (ПТМП)

При поиске возможностей совершенствования конструкций монтажных плат учитывались следующие факторы.

Широкое распространение и освоение технологии ДПП с двумя сигнальными слоями гарантирует низкую себестоимость изготовления межсоединений. Увеличение числа сигнальных слоёв требует технологии МПП и резко удорожает плату. Металлическая пластина в конструкции платы позволяет возложить на неё несколько важнейших функций: общего проводника для обратных токов сигналов и питания; экрана платы; радиатора и проводника тепла; жёсткой несущей пластины, на которой размещены радиоэлементы.

Между тем, совмещение диэлектрического слоя с печатными межсоединениями на обеих его сторонах и металлической пластины через некий диэлектрический слой, обеспечивающий, по крайней мере, электрическую изоляцию проводников внутреннего слоя от металлической пластины, образует законченную монтажную плату с новыми свойствами. Автором работы, совместно с Н.И. Базенковым, получен патент [171] на монтажную плату, названную авторами помехозащищённой теплопроводной монтажной платой (ПТМП). Эскиз поперечного сечения фрагмента ПТМП, поясняющий возможный вариант её конструкции, показан на рис. 4.1.

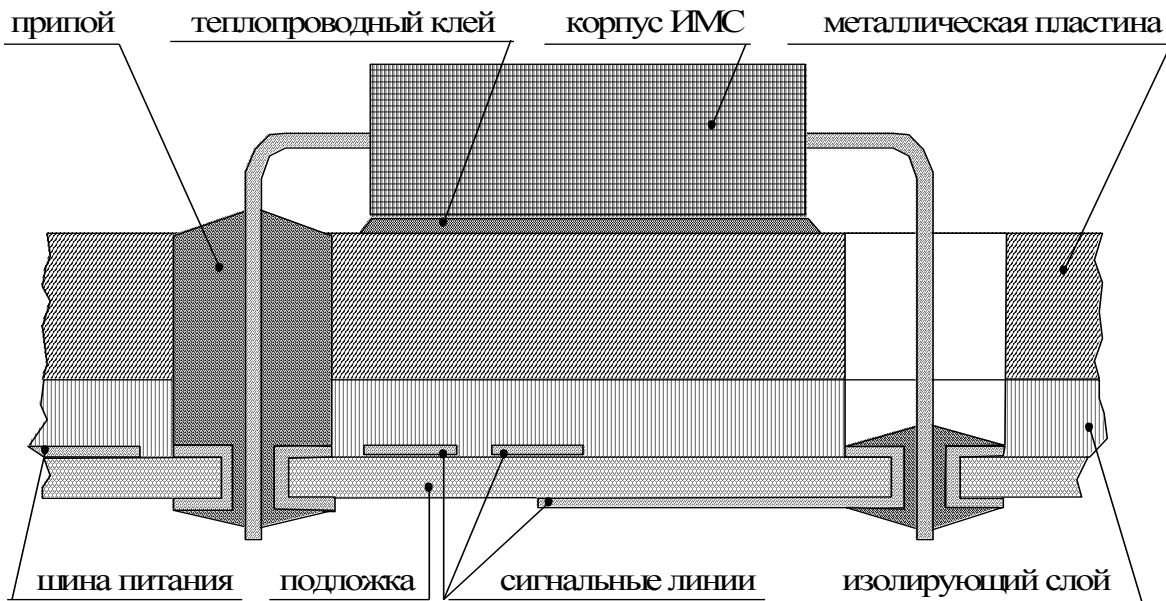


Рис. 4.1. Конструкция помехозащищённой теплопроводной монтажной платы

Корпус интегральной микросхемы (ИМС) приклеен к металлической пластине теплопроводным клеем. Выводы ИМС проходят через сквозные отверстия в металлической пластине и изолирующем слое в металлизированные отверстия подложки и припаиваются к ним. Сигнальные проводники, расположенные на внутренней стороне подложки, образуют обращённые полосковые линии, а на внешней — подвешенные полосковые линии. Шина питания расположена на внутренней стороне подложки. Общий вывод питания ИМС припаян к металлической пластине.

4.3 Возможности ПТМП (качественные оценки)

Качественное сравнение ПТМП с обычной ДПП позволяет выявить достоинства ПТМП, касающиеся технологических, тепловых и электрических характеристик.

Существенным достоинством ПТМП в части технологических характеристик является возможность изготовления подложки, максимально используя широко распространённую технологию производства обычных ДПП. Возникшие проблемы, связанные с изготовлением металлической пластины, компенсируются сверлением большого числа подложек в одном пакете, более качественной металлизацией отверстий и меньшим их диаметром, что стало возможным

при тонкой подложке. Проверено на практике использование полиимидной подложки на металлической пластине из алюминиевого сплава, температурные коэффициенты линейного расширения которых близки [172]. Найдены высококачественные и недорогие материалы для изолирующего слоя, например, полиэтилентерефталатные плёнки. Они в 10 раз дешевле полиимидных и более устойчивы к воздействию влаги и высокой температуры при таких же значениях относительной диэлектрической проницаемости и потерь [172]. Поэтому, предполагаемые затраты на изготовление ПТМП, по предварительным оценкам, должны быть не намного выше, чем – ДПП.

Наличие металлической пластины позволяет значительно улучшить тепловые характеристики монтажной платы. Например, с помощью теплопроводного клея легко обеспечивается хороший тепловой контакт нижней стороны корпуса микросхемы с металлической пластиной, выполняющей функции одновременно теплового радиатора и проводника тепла, выравнивая температуры корпусов микросхем и приближая их к температуре окружающей среды. Для дополнительного облегчения теплового режима тепло передаётся кондуктивным путём за счёт теплопроводности пластины, например, внешнему радиатору. Становится возможным отказ от вентиляции корпуса всего устройства. Это, в свою очередь, обеспечивает его более эффективную защиту и экранирование от неблагоприятных воздействий внешней среды. За счёт экранирования также уменьшается электромагнитное излучение самого устройства. Полученные возможности улучшения тепловых характеристик монтажной платы важны для увеличения плотности размещения компонентов быстродействующих электронных схем, отличающихся повышенным выделением тепла.

Качественная оценка позволяет предположить улучшение электрических характеристик всех видов межсоединений ПТМП: системы электропитания, выводов микросхем, а главное, сигнальных линий. Рассмотрим подробнее каждый из видов.

Использование металлической пластины как обратного проводника системы электропитания значительно уменьшает электрическое сопротивление этого проводника и обеспечивает его высокую эквипотенциальность. Кроме того, прямые проводники электропитания, выполненные, например, на внутреннем печатном слое подложки оказываются расположенными параллельно металлической пластине на малой высоте, равной толщине изолирующего слоя. За счёт этого, погонная индуктивность линии передачи, образованной прямым и обратным проводниками питания, оказывается значительно меньше, чем в ДПП. Это обеспечивает существенное уменьшение помех по цепям питания, связанных со всплесками потребления тока, например, при одновременном переключении большого числа выходов микросхем. Если необходима более эффективная система электропитания, то её проводники размещаются и на внешнем печатном слое подложки.

Металлическая пластина существенно уменьшает влияние внешних электромагнитных полей на плату, а так же излучение от платы. Площадь контуров протекания сигнальных токов в ПТМП существенно меньше, чем в ДПП. Кроме того, контуры меняют свою ориентацию с параллельной к плоскости платы на

перпендикулярную. Дополнительно, сильно сказывается экранирующее влияние металлической пластины.

Пропуск выводов микросхем в металлизированные отверстия подложки через сквозные отверстия в металлической пластине оказывает существенное влияние на неоднородности выводов микросхем, что важно для случая быстродействующих схем. Вывод микросхемы становится аналогичным отрезку коаксиальной линии передачи. Уменьшаются ёмкостная и индуктивная связи между соседними выводами.

Однако наибольшее значение имеет выполнение металлической пластиной функции обратного проводника для сигнальных токов, поскольку это существенно изменяет электрические характеристики сигнальных линий ПТМП по сравнению с обычной ДПП. В этом случае сигналы распространяются по линиям передачи с контролируемым волновым сопротивлением, которые похожи на микрополосковые линии (МПЛ). Печатные проводники наружного сигнального слоя подложки, отделённые от металлической пластины подложкой и изолирующим слоем, образуют подвешенные полосковые линии. Печатные проводники внутреннего сигнального слоя подложки, отделённые от металлической пластины изолирующим слоем, образуют обращённые полосковые линии.

ППЛ и ОПЛ являются сравнительно новыми и мало исследованными линиями передачи в отличие от МПЛ. Качественный анализ позволяет выявить возможности улучшения важных электрических характеристик межсоединений за счёт использования этих линий, а правильный выбор материала и толщины подложки и изолирующего слоя способен дать дополнительные улучшения.

Действительно, если материал подложки определяется, в основном, технологией изготовления печатных проводников и предварительно сводится к стеклотекстолиту или полиимиду малой толщины, то выбор материала для изолирующего слоя и выбор его толщины во многом определяются электрическими характеристиками. При заданном материале подложки, желательно, чтобы изолирующий слой имел меньшие, чем у подложки, относительную диэлектрическую проницаемость и потери, и большую, чем у подложки, толщину. Это позволяет существенно снизить эффективное диэлектрическое заполнение линий передачи и задержку сигнала в линиях, а следовательно, и уровень перекрёстных помех в связанных линиях. Однако необходимо отметить, что получившееся при этом резко неоднородное диэлектрическое заполнение линий способно стать причиной особенностей поведения характеристик одиночных и связанных линий при изменении их параметров. Эти особенности, в свою очередь, могут открыть дополнительные возможности уменьшения искажений сигналов в линиях.

Таким образом, сигнальные межсоединения новой платы образуются двумя различными видами линий передачи, которые отличаются от широко распространённых симметричной полосковой линии и микрополосковой линии значительно большей неоднородностью диэлектрического заполнения, но позволяют получить меньшие задержки сигналов в линиях. Поэтому целесообразно тщательное вычислительное моделирование межсоединений ПТМП с целью выявления возможностей уменьшения искажений сигналов в межсоединениях.

4.4 Макетирование межсоединений

Детальное исследование и отработка технологии изготовления ПТМП является отдельным вопросом и не входит в рамки данной работы. Здесь кратко затронуты только особенности изготовления макетов межсоединений ПТМП, показана её реализуемость в условиях производства.

Подложка

Подложка ПТМП с печатными проводниками с обеих сторон изготавливается по технологии обычных ДПП. Наибольшее распространение здесь получил комбинированный позитивный метод, которым изготавливаются ДПП, как правило, из двустороннего фольгированного стеклотекстолита толщиной 1–2 мм. Выбор такой толщины ДПП диктуется, главным образом, соображениями жёсткости. В ПТМП, благодаря жёсткости металлической пластины, толщина подложки ПТМП существенно меньше. Это улучшает электрические характеристики межсоединений, не меняя ничего принципиально в технологии изготовления подложки. Заготовка подложки становится гибкой и лёгкой, как листок бумаги. Однако возникающие из-за этого сложности её изготовления легко устраняются.

Известна более прогрессивная полуаддитивная технология, как правило, применяемая для изготовления гибких печатных плат и кабелей, а также отдельных слоёв МПП из тонких, например, полиимидных подложек. Она полностью снимает проблемы тонкой подложки, позволяет получить более плотные и качественные межсоединения, но менее распространена. Кроме того, стоимость полиимидных подложек выше, чем стеклотекстолитовых.

Практически, изготовление подложки ПТМП сводится к двум вариантам, условно названным "дешёвый стеклотекстолит" и "качественный полиимид".

Изолирующий слой

Изолирующий слой препятствует контакту внутреннего слоя проводников подложки с металлической пластиной. В качестве изолирующего слоя используются слои клея или лака, тонкая диэлектрическая плёнка или сетка и даже слой воздуха. Толщина и материал изолирующего слоя выбираются не только из конструктивных и технологических соображений, они значительно влияют на электрические характеристики межсоединений.

Металлическая пластина

Процесс изготовления металлической пластины должен включать в себя, как минимум, получение отверстий для выводов радиоэлементов, устанавливаемых со стороны металлической пластины. Получение хорошего электрического контакта пластины и общих выводов радиоэлементов облегчается, например, с помощью нанесения на пластину специальных покрытий.

Процесс изготовления пластины сильно зависит от выбора металла. Требования к металлу определяются, прежде всего, его качественными и стоимостными характеристиками, а также минимумом затрат при изготовлении. Учитываемые качественные характеристики определяются функциями, которые выполняются пластиной. Так, для хорошей общей земли сигналов и питания нужен металл с малым объёмным удельным электрическим сопротивлением. Для эффективного отвода тепла от корпусов радиоэлементов желательна высокая

теплопроводность металла. Малая плотность важна для снижения веса платы, а различные прочностные характеристики должны обеспечивать требуемую жёсткость платы с учётом массы установленных радиоэлементов и минимальные затраты для получения отверстий. Важны и технологические характеристики металла, влияющие на получение хорошего электрического контакта пластины и общих выводов радиоэлементов. Наконец, необходима минимальная разница температурных коэффициентов линейного расширения пластины и подложки.

Исходя из этих критериев, выбор металла сводится к трём вариантам.

Медь обладает высокой электропроводностью, хорошо проводит тепло и легко паяется, но относительно дорога.

Алюминий и его сплавы с магнием (например, АМц или Д16) лёгки, теплопроводны и дешевы, но требуют особого подхода при пайке.

Сталь является недорогим и прочным металлом, не создаёт особых проблем при пайке. Но низкие электропроводность и теплопроводность стали, а также высокая плотность являются недостатками. Кроме того, магнитные свойства стали ухудшают электрические характеристики межсоединений.

Особое место занимает вопрос получения отверстий в металлической пластине. Сверловка отверстий в пластине вместе с подложкой обеспечивает точное совмещение отверстий и высокую скорость сверловки. Однако, параметры режима сверловки станка для печатных плат (высокая скорость подачи и очень большие обороты) рассчитаны на твёрдый диэлектрик, а не на металл. Поэтому для такой сверловки желательна минимальная толщина пластины. Сталь может оказаться слишком твёрдой, а алюминий очень мягким, дающим длинную стружку. Поэтому оптимальным оказывается сплав Д16.

В отличие от диаметра отверстий в подложке (менее 1 мм) диаметр отверстий в пластине должен быть достаточно большим (около 2 мм), чтобы исключить её электрический контакт с выводами радиоэлементов. Это однозначно предполагает окончательную сверловку пластины отдельно от подложки, хотя и не исключает предварительную сверловку пластины вместе с подложкой. Например, пластина не просверливается полностью, а только размечается сверлом, когда находится под подложкой. Если позволяет режим сверловки, пластина размещается над подложкой и просверливается полностью.

Если сверлить пластину вместе с подложкой нельзя, используется сверлильный станок для металлов. При этом режим сверловки подбирается для конкретного металла и сверлится пакет из большого числа пластин. Недостатками в этом случае являются малая скорость сверловки и неточное совмещение отверстий пластины и подложки.

Наконец, для единичного производства несложных плат всегда применим вариант ручной сверловки на настольном сверлильном станке. Это самый трудоёмкий и грубый вариант, но он не требует специальных станков.

В качестве альтернативы сверловке отверстия вырубаются, подобно базовым отверстиям в заготовке. Производительность метода очень высока. Однако для него необходимо изготовление своего штампа для каждой платы или применение специальных наборных штампов.

Электрический контакт к металлической пластине

Электрический контакт выводов радиоэлементов с проводниками внешнего слоя легко осуществить обычными средствами, например, ручной пайкой паяльником или "волной" при серийном производстве. Протекание сравнительно больших токов через общий вывод радиоэлемента требует особого подхода к реализации его контакта с металлической пластиной. Сложности создают высокая теплоёмкость и особенности пайки металлической пластины.

Для корректного выбора способа контакта необходимо учесть, что удельное объёмное электрическое сопротивление припоя на порядок больше, чем – хорошо проводящего металла, а контактола (токопроводящего клея) – даже на два порядка [173]. Минимальное электрическое сопротивление контакта и его высокая прочность получаются при сварке металлов. Приемлемо применение, например, горячей контактной сварки или холодной сварки давлением, но это требует специального оборудования и довольно проблематично. Получение электрического контакта с помощью токопроводящего клея, наносимого в место соединения проводников с помощью шприца, отличается простотой, но даёт высокое электрическое сопротивление контакта. Если учесть важность контакта общего проводника, этот недостаток является довольно существенным, но в отдельных случаях компенсируется малым электрическим сопротивлением металлической пластины.

Традиционным и проверенным решением данной задачи является использование пайки. Однако способы пайки для разных металлов сильно различаются не только в технологии, но и в стоимости. Основные способы пайки, которые применимы для металлической пластины ПТМП, рассмотрим на примере пайки алюминия и его сплавов [174].

Низкотемпературную пайку алюминия и его сплавов припоями на основе олова осуществляют, применяя удаляющие окись алюминия флюсы на основе высококипящих органических соединений типа триэтанолamina с добавками в качестве активных компонентов бортфторидов кадмия и цинка. Недостатком способа является то, что компоненты легкоплавких припоев в паре с алюминием образуют коррозионно-нестойкие соединения. Это связано с большой разностью нормальных электродных потенциалов. Более высокая коррозионная стойкость получается при бесфлюсовой пайке алюминия в специальных газовых средах или вакууме, что, однако сложно реализуемо в нашем случае.

Известны довольно простые, хотя и более трудоёмкие способы низкотемпературной пайки без применения флюсов, такие как абразивная пайка или пайка трением. При этом способе пайки окисную плёнку с поверхности алюминия удаляют находящимся в расплаве припоя шабером или частицами абразива (асбест, металлические порошки). Для лужения алюминия применяют также абразивные паяльники, у которых рабочая часть представляет собой стержень из частиц припоя и абразива. Лужение производят также с помощью ультразвуковых паяльников и в ультразвуковых ваннах. Применим также способ абразивно-кавитационного лужения, при котором твёрдые частицы, находящиеся в жидком припое, в ультразвуковом поле оказывают дополнительное абразивное воздействие на металл.

Многие недостатки и затруднения исчезают при использовании технологических покрытий под пайку. В качестве таких покрытий при низкотемпературной пайке алюминия принято использовать медь, никель, серебро, цинк. Покрытие наносится электролитически, химически, термовакуумным напылением и другими способами. Наиболее высокое качество сцепления покрытия с основным металлом и коррозионную стойкость паяных соединений обеспечивает применение никель-фосфорных покрытий, наносимых на поверхность алюминия химическим способом из специальных гипофосфитных растворов. Пайка по покрытию легко осуществляется оловянно-свинцовыми припоями с применением канифольно-спиртовых флюсов и отличается высокой коррозионной стойкостью. Применяют нанесение слоя меди или цинка на поверхность алюминия методом горячего плакирования. Например, листы алюминия, плакированные медью, выпускаются промышленностью, но стоят гораздо дороже обычного алюминия. При всей своей привлекательности, нанесение покрытия на металлическую пластину – это ещё один технологический процесс, удорожающий изготовление ПТМП. Однако упрощение пайки и улучшение, благодаря покрытию, определённых характеристик ПТМП оправдывает дополнительные затраты.

Макеты ПТМП

На производственном оборудовании в цехах ПО "Контур" (г. Томск) автором работы были опробованы различные варианты изготовления элементов ПТМП. В результате получено несколько макетов ПТМП.

В условиях серийного производства ДПП комбинированным позитивным методом была изготовлена партия подложек ПТМП размерами 270*250 мм из двусторонне фольгированного стеклотекстолита марки СТФ-2-35-0,25 с толщиной диэлектрика 0,18 мм. На вертикально-фрезерном станке с ЧПУ были просверлены металлические пластины из листов алюминиево-марганцевого сплава толщиной 1 мм, дюралюминия толщиной 0,5 мм и стали толщиной 0,4 мм. На настольном сверлильном станке по кондуктору были просверлены металлические пластины из листов алюминиево-марганцевого сплава толщиной 1 мм и стали толщиной 1 мм. На стальную пластину толщиной 1 мм было нанесено под пайку покрытие олово-висмут, такое же, что и на подложку. В качестве изолирующего слоя использовался материал ПДЛ толщиной 0,36 мм, представляющий собой полиэтилентерефталатную плёнку с нанесённым с обеих сторон клеевым слоем, покрытым защитной плёнкой. К стальной и алюминиевой пластинам толщиной 1 мм были приклеены материалом ПДЛ подложки с сигнальными слоями. Полученные таким образом макеты ПТМП затем были вырублены по периметру штампом и снабжены стандартным ребром жёсткости.

Кроме того, были изготовлены два фрагмента ПТМП размером 76*31 мм из алюминиево-марганцевого сплава толщиной 1 мм с двумя микросхемами, приклеенными теплопроводным клеем к металлической пластине. Общие выводы микросхем припаяны к пластине абразивной пайкой, остальные выводы на одном фрагменте припаяны вручную паяльником, а на другом – "волной".

Наконец, негативным методом было изготовлено большое число подложек для моделирования распространения сигналов и перекрёстных помех в одино ч-

ных и связанных межсоединениях. Межсоединения выполнены с различным числом полосок и разносов между ними, а также на подложках разной толщины.

4.5 Распространение импульсных сигналов в одиночных линиях

Распространение импульсных сигналов в межсоединениях ПТМП экспериментально моделировалось на двух макетах одиночных линий с печатными полосками длиной 240 мм, шириной 0,3 мм и толщиной 0,035 мм. Первая линия представляла собой обычную МПЛ с подложкой из стеклотекстолита с толщиной 0,2 мм, вторая – ППЛ с подложкой из стеклотекстолита с толщиной 0,18 мм и изолирующим слоем из полиэтилентерефталата с толщиной 0,12 мм. К концам линий были припаяны малогабаритные СВЧ разъёмы типа СРГ-50, с помощью которых они включались в 50-омный тракт осциллографа С1-91/3, от внутреннего генератора которого на линии подавались импульсы со временем спада около 100 пс. На рис. 4.2 приведены осциллограммы сигналов на входах линий ($V_{ВХ}$), на выходе МПЛ ($V_{МПЛ}$) и на выходе ППЛ ($V_{ППЛ}$). После прохождения импульса по линии время спада по уровням 0,1–0,9 от его амплитуды составило около 300 пс для МПЛ и около 180 пс для ППЛ. Существенно меньшие искажения импульсных сигналов в ППЛ получены за счёт использования изолирующего слоя с меньшей, чем у подложки зависимостью параметров от частоты.

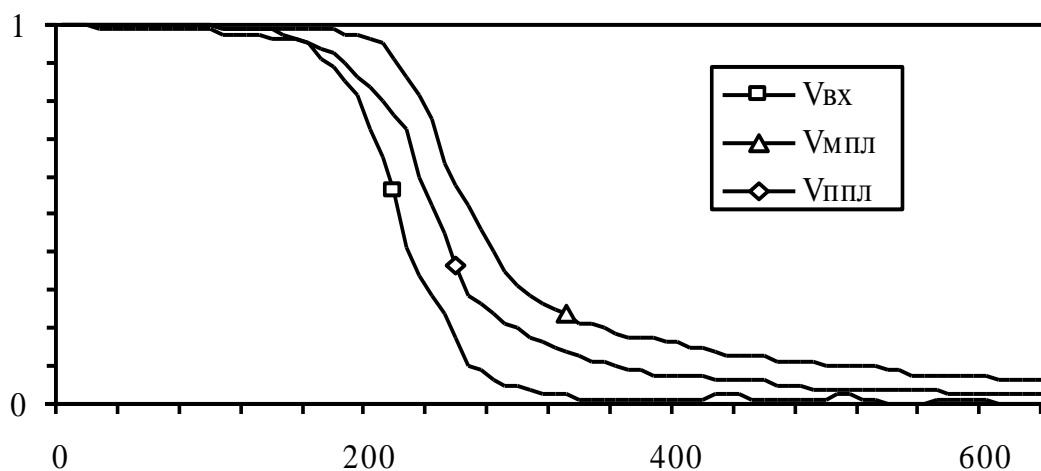


Рис. 4.2. Осциллограммы сигналов (В, пс) на входах и выходах МПЛ и ППЛ

4.6 Перекрёстные помехи в парах связанных линий

Проведена экспериментальная оценка искажений сигналов из-за перекрёстных помех. Для этого были изготовлены макеты пар связанных МПЛ, ППЛ и ОПЛ с полосками длиной 250 мм и толщиной 0,035 мм. Величины конечных резистивных нагрузок на всех концах линий равнялись 100 Ом. На вход активной линии от генератора Г5-78 подавались импульсы со временем фронта 1 нс и амплитудой 1 В. Пиковое значение напряжения в начале и на конце пассивной линии измерялось осциллографом С1-97.

Известно [205], что в паре связанных МПЛ электромагнитная связь уменьшается с ростом величины s/h , где s – разнос линий (расстояние между соседними краями линий), а h – высота линий над плоскостью земли. Макеты пар связанных линий были изготовлены с такими параметрами, чтобы при заданном волновом сопротивлении одиночной линии ≈ 100 Ом получить максимальную величину s/h . Шаг трассировки линий (расстояние между их вертикальными осями) не изменялся и выбран равным 2,5 мм.

Первой исследовалась МПЛ с подложкой из стеклотекстолита, как частный случай ППЛ с подложкой и изолирующим слоем из стеклотекстолита. Поперечное сечение макета МПЛ показано на рис. 4.3.

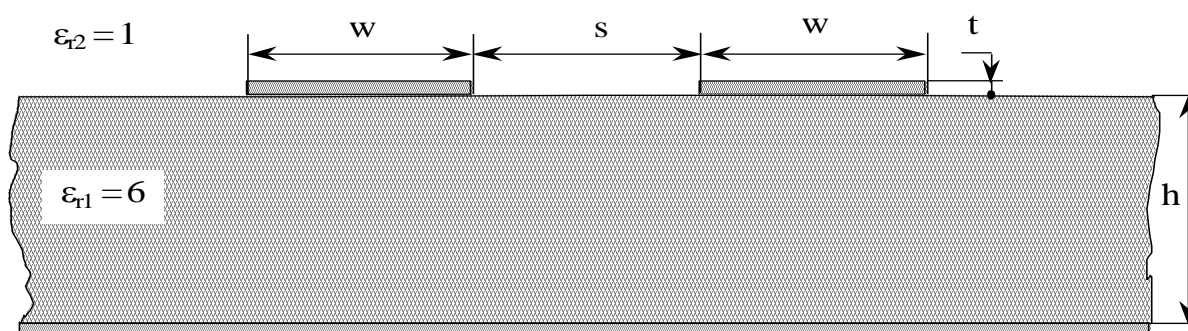


Рис. 4.3. Поперечное сечение макета связанных МПЛ

Более тонкая подложка позволяет увеличить s/h . Однако для сохранения волнового сопротивления надо уменьшать ширину проводника, что трудно реализуемо технологически. Дополнительное уменьшение уровней перекрёстных помех получается уменьшением диэлектрического заполнения линии, а именно, используя ППЛ с изолирующим слоем с меньшей, чем у подложки относительной диэлектрической проницаемостью, например, из воздуха. Поперечное сечение макета такой ППЛ показано на рис. 4.4.

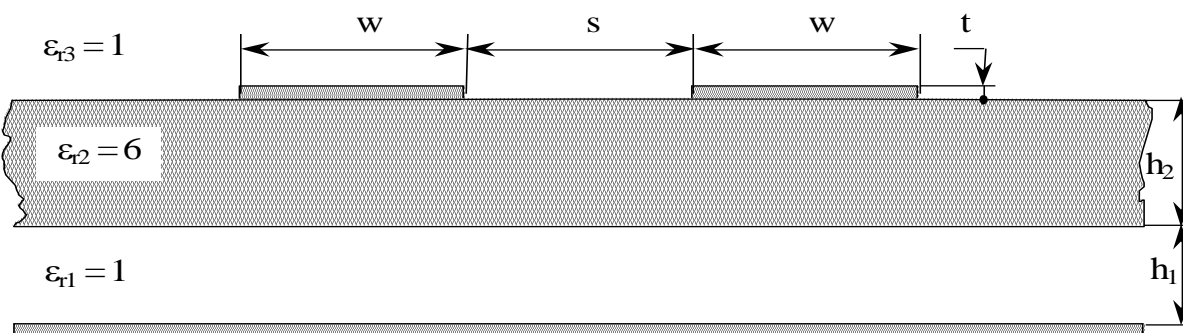


Рис. 4.4. Поперечное сечение макета связанных ППЛ

Параметры линий и соответствующие им измеренные и вычисленные пиковые значения напряжения перекрёстных помех (mV) в начале и конце пассивной линии для МПЛ и для ППЛ приведены в табл. 4.1. Из неё видно, что уменьшение ширины полоски w (при неизменном шаге трассировки $s+w=2,5$ мм) и толщины подложки h уменьшает перекрёстные помехи в МПЛ. Для ППЛ (пятая строка табл. 4.1, $h=h_1+h_2=0,19+0,19$ мм) перекрёстная помеха в начале пассивной линии меньше, чем для МПЛ с такой же шириной полоски

(четвёртая строка табл. 4.1), а перекрёстная помеха на конце пассивной линии близка к нулю.

Таблица 4.1

**Пиковые значения напряжения перекрёстных помех (мВ)
в начале и конце пассивной линии для МПЛ (строки 1–4) и ППЛ (строка 5)**

w, мм	h, мм	Начало		Конец	
		Вычисление	Измерение	Вычисление	Измерение
0,70	2,0	93	91	-50	-32
0,50	1,5	61	59	-45	-30
0,30	1,0	30	37	-33	-22
0,25	0,6	13	18	-20	-8
0,25	0,19+0,19	10	10	0	-3

В табл. 4.2 показаны измеренные и вычисленные пиковые значения напряжения перекрёстных помех (мВ) в начале пассивной линии в зависимости от шага трассировки ($s+w$) для пары ППЛ и для пары ОПЛ. В обоих случаях ширина полоски w равна 0,39 мм и толщина подложки h_2 из стеклотекстолита ($\epsilon_{r2}=6$) равна 0,19 мм. Толщина воздушного изолирующего слоя h_1 для ППЛ равна 0,11 мм, а для ОПЛ равна 0,19 мм. Из табл. 4.2 видно, что даже при сравнительно малом шаге трассировки 1,0 мм перекрёстная помеха в паре связанных ППЛ и ОПЛ относительно большой длины (250 мм) в начале пассивной линии составила менее одной десятой от амплитуды 1 В входного импульса с фронтом в 1 нс.

Таблица 4.2

**Пиковое значение напряжения перекрёстной помехи
в начале пассивной линии (mV) для ППЛ и для ОПЛ**

s+w, мм (w=0,39 мм)	ППЛ		ОПЛ	
	Вычисление	Измерение	Вычисление	Измерение
1,00	54	77	70	91
1,25	34	50	40	56
1,50	23	40	33	42
1,75	16	27	23	31
2,00	12	22	17	23
2,25	9	16	13	18
2,50	7	15	10	15

5. ВОЗМОЖНОСТИ УМЕНЬШЕНИЯ ИСКАЖЕНИЙ СИГНАЛОВ В МЕЖСОЕДИНЕНИЯХ

В данном разделе сначала кратко рассмотрены основные причины искажений сигналов в межсоединениях и способы их уменьшения. Затем показаны новые возможности уменьшения искажений сигналов в межсоединениях с двухслойным диэлектриком: для одиночных отрезков межсоединений по результатам оценки их параметров и для более сложных конфигураций межсоединений по результатам вычисления временного отклика.

5.1 Основные причины искажений сигналов в межсоединениях и способы их уменьшения

5.1.1 Основные причины искажений сигналов в межсоединениях

При передаче гармонического сигнала по одиночному межсоединению он задерживается по времени из-за конечной скорости распространения и затухает по амплитуде из-за потерь в материалах межсоединения. Зависимость задержки и потерь от частоты сигнала называют дисперсией. При полигармоническом сигнале каждая его спектральная составляющая проходит по межсоединению со своей задержкой и своим затуханием, что приводит к изменению временной формы сигнала. Изменение геометрических параметров и параметров материалов межсоединения по его длине приводит к изменению задержки и потерь по длине межсоединения.

Важное влияние на искажения сигнала, передаваемого по межсоединению, оказывают нагрузки или неоднородности, расположенные в начале, конце или по длине межсоединения. В результате часть сигнала отражается от каждой нагрузки и распространяется по межсоединению в обратном направлении. Поэтому к концу межсоединения сначала приходит оставшаяся часть сигнала, а позже приходят его части, испытавшие чётное число отражений [175]. Величина, полярность и форма отражённой части сигнала зависят от соотношения нагрузки с волновым сопротивлением межсоединения и от характера нагрузки (резистивная, комплексная). Нелинейность нагрузки обогащает спектр сигнала: в случае гармонического сигнала к нему добавляются его гармоники, а в случае полигармонического сигнала – гармоники каждой составляющей спектра сигнала и их комбинационные частоты [176].

Причиной искажений сигналов, передаваемых по межсоединениям, часто является внешнее электромагнитное поле. Действительно, любое межсоединение представимо в качестве приёмной антенны, характеристики которой определяются видом и параметрами межсоединения. Такое представление часто помогает качественно оценить возможности уменьшения влияния внешнего электромагнитного поля на сигналы, передаваемые по межсоединениям. Источники электромагнитного поля могут быть различными. Важным частным случаем такого источника являются сигналы соседних межсоединений.

Причины искажений сигналов, распространяющихся в нескольких межсоединениях, сложно определить однозначно. В упрощённом представлении они

зависят, в общем случае, от величины и соотношения электрической и магнитной индукции в отдельных межсоединениях. Для некоторых частных случаев конфигураций многопроводных межсоединений делаются более определённые выводы. Наиболее простой конфигурацией являются параллельные межсоединения, параметры которых не изменяются по длине. Если межсоединения параллельны и их диэлектрическое заполнение в поперечном сечении, ортогональном направлению межсоединений, неоднородно, то любой сигнал, возбуждаемый в межсоединении, можно представить линейной комбинацией нескольких мод, каждая из которых распространяется со своей постоянной скоростью [177]. Однако при изменении параметров линии по длине такой подход уже неприменим.

5.1.2 Способы уменьшения искажений сигналов в межсоединениях

Уменьшение искажений сигналов осуществляется, прежде всего, соответствующим выбором параметров межсоединений. Для снижения задержки сигнала в межсоединении фиксированной длины уменьшают относительную диэлектрическую проницаемость (ϵ_r) диэлектриков межсоединения. Когда диэлектрики заданы, снижение задержки достигается таким изменением размеров и расположения диэлектриков и проводников межсоединения, чтобы большая часть электромагнитного поля сигнала распространялась в диэлектрике с меньшей ϵ_r .

Указанные возможности снижения задержки относятся и к снижению затухания сигнала, вызванного потерями в диэлектрике. Потери в проводниках межсоединения уменьшаются при изготовлении проводников из металла с возможно большей удельной электрической проводимостью. Однако потери в проводниках складываются из нескольких составляющих, величины которых зависят от размеров и формы проводников. Первая составляющая определяется омическим сопротивлением проводника постоянному току и, как известно, обратно пропорциональна площади поперечного сечения проводника, поскольку плотность распределения тока по поперечному сечению полагается равномерной. С ростом частоты сигнала сильнее проявляется скин-эффект, приводящий к росту плотности тока на границе проводника и увеличению потерь. Эффект близости проводников друг к другу также приводит к росту потерь. Результаты вычисления плотности тока показывают, что, например, общее сопротивление микрополосковой линии переменному току может в четыре раза превышать сопротивление переменному току того же микрополоска, удалённого от плоскости земли [178]. Указанные эффекты существенно зависят от формы, размеров и расположения проводников и могут быть уменьшены соответствующим их выбором.

Для минимизации искажений сигналов из-за разброса размеров и свойств материалов относительно номинальных значений используются известные принципы и методы [179]. Наиболее действенным из них является разработка таких межсоединений, характеристики которых малочувствительны к изменениям параметров межсоединений вблизи от номинальных значений.

Отражения сигнала от нагрузок на концах межсоединения уменьшаются с помощью согласования. В случае резистивных нагрузок традиционным способом согласования является выравнивание оконечной нагрузки с волновым сопротивлением межсоединения. Отметим, что полное согласование МПЛП даётся гораздо сложнее, чем одиночной линии [180]. Известно согласование в узкой полосе частот четверть-волновыми отрезками линий передачи, а также широкополосное согласование отрезком линии с волновым сопротивлением, экспоненциально изменяющимся по длине линии [181]. Возможен и такой выбор параметров межсоединений и нагрузок, когда отражённые сигналы на конце межсоединения компенсируют друг друга [182]. Примечательно, что при определённой длине межсоединения с потерями достаточное затухание отражённых сигналов вовсе не требует согласования [183,184]. Известно также использование корректирующих согласующих цепей, учитывающих рост потерь с частотой [185]. Если нагрузки или неоднородности расположены по длине межсоединения, то возможна их компенсация за счёт изменения параметров самого межсоединения [186].

Уменьшение искажений сигнала, вызванных воздействием внешнего электромагнитного поля, как правило, осуществляется с помощью экранирования. Дополнительные возможности даёт изменение ориентации межсоединения относительно источника поля, а также выбор конфигурации и параметров межсоединений. Широко используется способ попарного скручивания прямого и обратного проводников.

Указанные способы также применяются и для уменьшения взаимных влияний в многопроводных межсоединениях, однако, достижение результата даётся сложнее. Например, при расположенных рядом скрученных парах проводников влияние одной пары на другую уменьшается за счёт использования кратных шагов скрутки и сдвига вдоль линии на половину шага скрутки. Эти способы широко применяются в воздушных линиях связи, в многопроводных плетёных жгутах для межблочной связи и современных кабелях (например, марок UTP, STP, SFTP) для локальных компьютерных сетей. Известны и полосковые варианты нескольких витых пар в плоских кабелях [187] и печатных платах [188]. Примером уменьшения взаимных влияний проводников за счёт выбора их взаимной ориентации является ортогональная разводка соседних сигнальных слоёв в печатных платах.

В случае многопроводных межсоединений, расположенных параллельно друг другу, уменьшение их взаимовлияний достигается посредством увеличения расстояния между ними. Однако эффективность этого способа существенно зависит от формы и расположения обратного проводника межсоединений. В общем случае, за счёт обратного проводника можно уменьшать взаимовлияния межсоединений вплоть до полного их экранирования. Примером эффективного использования для этой цели обратного проводника является общая плоскость земли. Взаимовлияние межсоединений, расположенных по разные стороны от общей плоскости, очень мало. Межсоединения, расположенные на одной стороне общей плоскости, располагают как можно ближе к ней. Известно также применение для этой цели дополнительных экранирующих проводников

[172,189,190]. Уменьшение взаимовлияний в межсоединениях возможно за счёт целенаправленного изменения их параметров по длине [191], а также за счёт выбора параметров их диэлектрического заполнения [192–194].

Выполненный краткий обзор способов уменьшения искажений сигналов в межсоединениях и известная автору литература показывают, что исследований, в которых опубликованы конкретные рекомендации по уменьшению искажений в межсоединениях, очень мало. Одна из причин этого, по-видимому, заключается в существовании ноу-хау по конкретным практическим вопросам, стоящим на переднем крае развития современной электроники. Более того, в имеющихся публикациях встречаются результаты, даже противоречащие друг другу. Например, использование дополнительных заземлённых полосок между двумя полосками известно как способ развязки электромагнитных влияний [172]. Однако в [189] сделан вывод, что при близком расположении общей плоскости земли этот способ не оправдан, поскольку его эффективность существенно снижается. А в известной работе [190] показано, что заземление экранирующих полосок на концах даже увеличивает перекрёстную помеху на дальнем конце пассивной линии. Такое положение дел говорит и о том, что существенной причиной недостаточного освещения способов уменьшения искажений сигналов является большая сложность получения однозначных ответов на такие вопросы.

Между тем, представляется, что довольно большой и важный ресурс уменьшения искажений – изменение параметров поперечного сечения межсоединений – остаётся использованным не полностью. Действительно, многие причины искажений, например, потери, задержка, ёмкостные и индуктивные взаимовлияния, зависят именно от параметров поперечного сечения межсоединений. Сильнейшее влияние на эти искажения оказывает диэлектрическое заполнение, как правило, неоднородное. Причина в том, что неоднородность диэлектрического заполнения неодинаково влияет на ёмкостные и индуктивные параметры межсоединений, соотношения которых, в свою очередь, определяют основные характеристики одиночных и связанных межсоединений. Известно, что именно неоднородность диэлектрического заполнения успешно используется исследователями для получения требуемых характеристик межсоединений в СВЧ устройствах. Одним из примеров является слоистое диэлектрическое заполнение. Так, воздушные диэлектрические слои, позволяющие существенно уменьшить значение постоянной распространения и её дисперсию, а также получить нулевую чувствительность некоторых характеристик к изменениям геометрических параметров линий, широко используются в СВЧ линиях передачи, например, в подвешенной и обращённой микрополосковых линиях с одной плоскостью земли [195], в подвешенной полосковой линии с двумя плоскостями земли [196]. В случае двух связанных линий с воздушным слоем оказывается возможным выравнивание фазовых скоростей чётной и нечётной мод, что эквивалентно выравниванию коэффициентов ёмкостной и индуктивной связи и часто используется для улучшения характеристик направленных ответвителей. Возможность такого выравнивания при изменении расстояния между полосками была показана для подвешенной пары связанных полосковых линий с замкнутым экраном [192], а также при изменении различных параметров для пары

полосковых линий на подложке из поликора, подвешенной в воздухе между двумя экранами [193]. Известно также использование для этой цели одно- и двухслойного анизотропного диэлектрика [194]. Возможность выравнивания фазовых скоростей чётной и нечётной мод в подвешенной полосковой линии успешно использована в конструкции топологических ключей для пикосекундной цифровой обработки СВЧ сигналов [197].

Однако отсутствуют работы, детально исследующие возможности уменьшения искажений сигналов в межсоединениях с двухслойным диэлектриком для случаев одного и нескольких отрезков одиночных, связанных и многопроводных линий. Между тем, такие исследования весьма актуальны. Предварительный качественный анализ даёт все основания полагать, что неоднородность диэлектрического заполнения предоставляет многочисленные возможности уменьшения искажений в таких межсоединениях по сравнению с другими.

Отметим, что для приближённой количественной оценки некоторых из этих возможностей не надо вычислять отклик. Достаточно лишь оценка первичных параметров, из которых легко получаются основные характеристики межсоединений, во всяком случае, для одного отрезка межсоединений. Поэтому в данной работе сначала рассматриваются возможности уменьшения искажений сигналов за счёт изменения параметров поперечного сечения межсоединений, которые видны из результатов вычислений первичных параметров отрезков межсоединений. Они представлены в разделе 5.2.

Конечно, в общем случае, искажения сигналов в межсоединениях зависят от соотношения параметров сигналов, межсоединений и их окончаний. Строгая оценка возможностей уменьшения искажений требует анализа отклика МПЛП, что, в общем случае произвольных воздействий, конфигураций МПЛП и окончаний, является весьма сложной задачей [198–201]. Определённые упрощения возможны, если рассматривать частные случаи, например, стандартных входных воздействий, неразветвлённых конфигураций и согласованных окончаний, сосредоточившись на поисках возможностей уменьшения искажений за счёт изменения параметров самих отрезков МПЛП. Отметим, что даже поиск возможностей уменьшения искажений за счёт изменения параметров по длине МПЛП требует весьма непростого анализа нерегулярных МПЛП [202,203] или последовательно соединённых отрезков МПЛП с неоднородностями на стыках [175,204]. Однако для некоторых относительно простых конфигураций вычисление отклика оказывается несложным. Возможности дополнительного уменьшения искажений в таких межсоединениях, исследованные с помощью вычисления временного отклика, показаны в разделе 5.3.

5.2 Уменьшение искажений по результатам оценки параметров

В данном разделе представлены зависимости погонных параметров и полученных из них характеристик одиночных, связанных и многопроводных вариантов ППЛ и ОПЛ от различных параметров линий, показывающие многочисленные возможности уменьшения искажений в межсоединениях.

5.2.1 Одиночные межсоединения

Для моделирования распространения сигналов в одиночных межсоединениях часто пользуются статическим приближением, полагающим потери и дисперсию отсутствующими. При этом необходимо определить две основные характеристики распространения – волновое сопротивление (Z) и эффективную диэлектрическую проницаемость (ϵ_{re}) линии передачи.

Для широкого диапазона параметров одиночной ППЛ и одиночной ОПЛ (рис. 5.1) проведены вычисления волнового сопротивления и эффективной диэлектрической проницаемости. Здесь представлены лишь некоторые зависимости, интересные своими особенностями, которых нет в обычных микрополосковых линиях.

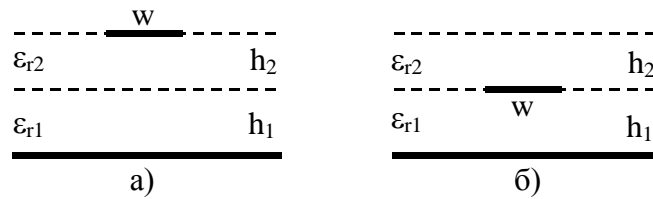


Рис. 5.1. Одиночная ППЛ (а) и одиночная ОПЛ (б)

Все вычисления проведены при относительной диэлектрической проницаемости подложки $\epsilon_{r2}=5$ для разных значений относительной диэлектрической проницаемости изолирующего слоя ϵ_{r1} . На рис. 5.2 для ППЛ показаны зависимости волнового сопротивления от относительной толщины подложки h_2/w при относительной толщине изолирующего слоя $h_1/w=1$. Характерной особенностью зависимостей является возможность получения точки минимума, а значит, нулевой чувствительности волнового сопротивления к изменению h_2 . Это позволяет достичь стабильного волнового сопротивления ППЛ, особенно, при тонких подложках, для которых трудно обеспечить малый относительный разброс по толщине.

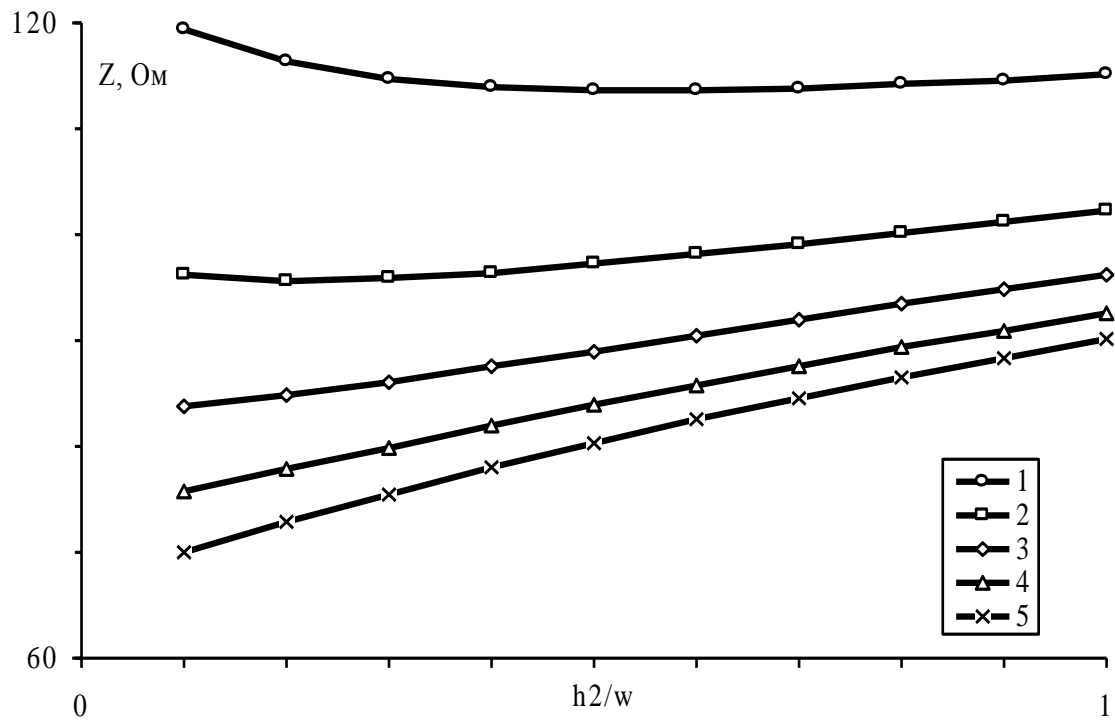


Рис. 5.2. Зависимости Z ППЛ от относительной толщины подложки для $\epsilon_{r1}=1,2,3,4,5$

На рис. 5.3 показаны зависимости эффективной диэлектрической проницаемости ППЛ от относительной толщины подложки h_2/w при относительной толщине изолирующего слоя $h_1/w=1$. На рис. 5.4 показана зависимость эффективной диэлектрической проницаемости ОПЛ от h_1/w при $h_2/w=1$.

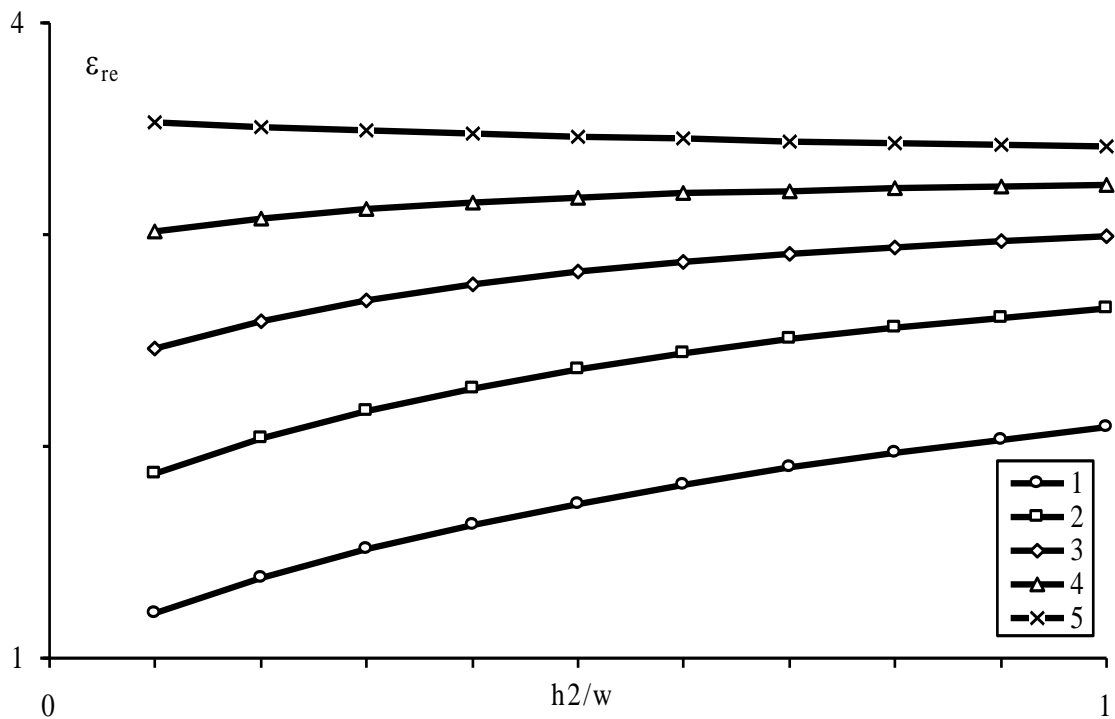


Рис. 5.3. Зависимости ϵ_{re} ППЛ от относительной толщины подложки для $\epsilon_{r1}=1,2,3,4,5$

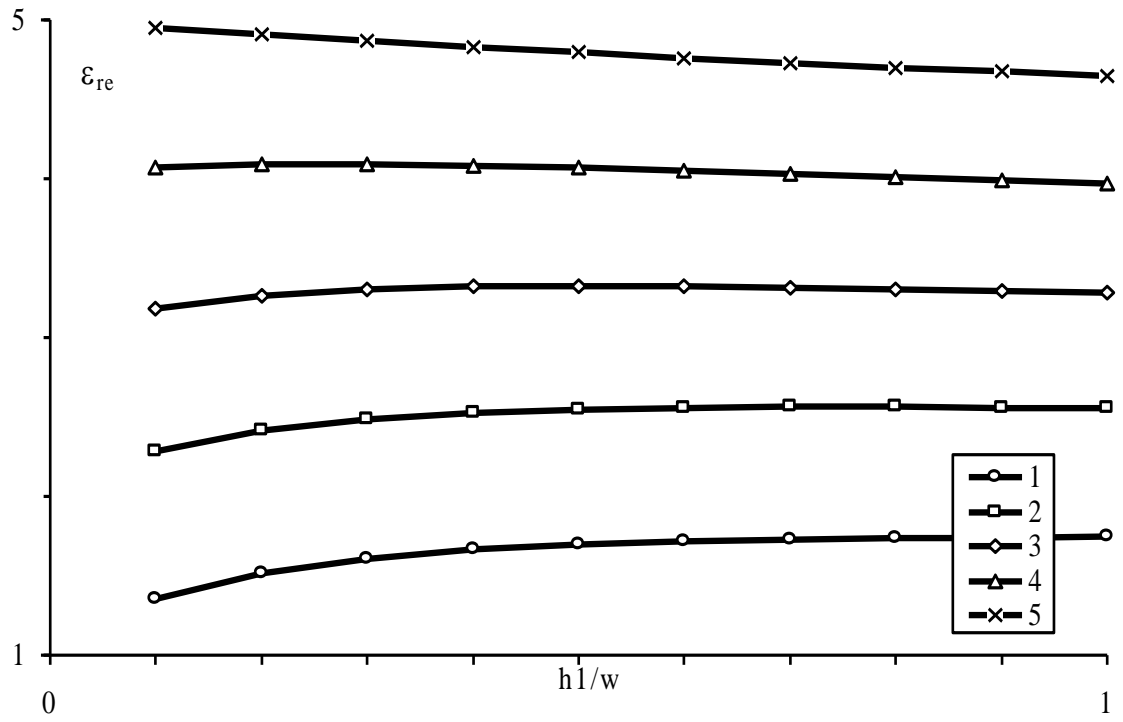


Рис. 5.4. Зависимости ϵ_{re} ОПЛ от относительной толщины изолирующего слоя для $\epsilon_{r1}=1,2,3,4,5$

Из графиков обоих рисунков можно сделать следующие выводы.

Существует такое соотношение параметров ППЛ и ОПЛ, при котором эффективная диэлектрическая проницаемость изменяется незначительно в широком диапазоне значений толщин. Эта особенность линий может быть полезна для случаев, требующих особой стабильности задержки в линиях.

В отличие от случая, когда относительные диэлектрические проницаемости обоих диэлектрических слоёв равны ($\epsilon_{r1}=5$ и $\epsilon_{r2}=5$ для верхних графиков обоих рисунков), при условии $\epsilon_{r1}<\epsilon_{r2}$ (нижние графики) можно уменьшить эффективную диэлектрическую проницаемость за счёт уменьшения толщины слоя. Это позволяет уменьшить отражения сигналов в одиночных линиях и перекрёстные помехи в связанных линиях.

5.2.2 Связанные межсоединения

В данном разделе рассмотрены параметры связанных линий. Сначала показана возможность уменьшения перекрёстных помех в двух ППЛ и в двух ОПЛ за счёт изменения параметров диэлектриков при неизменных значениях ширины полосок, расстояния между ними и волнового сопротивления одиночной линии. Затем рассмотрены ёмкостные и индуктивные взаимовлияния, без условия сохранения неизменным волнового сопротивления одиночной линии, для трёх вариантов связанных линий: двух ППЛ, двух ОПЛ, а также ППЛ и ОПЛ.

Возможность уменьшения перекрёстных помех за счёт выбора параметров подложки и изолирующего слоя

Известно [205], что одним из самых эффективных способов уменьшения связи в паре МПЛ является увеличение относительного разноса полосок (отношения расстояния между краями полосок к расстоянию между полоской и плоскостью земли). При этом увеличивают расстояния между осями полосок или уменьшают их ширину. Но на практике эти размеры часто сразу же оказываются минимально возможными для имеющейся технологии изготовления печатных проводников, чтобы получить максимальную плотность межсоединений.

Дополнительно, относительный разнос увеличивают за счёт уменьшения расстояния полосок до плоскости земли. Но при этом уменьшается волновое сопротивление одиночной линии, величина, как правило, заданная, зависящая от многих других факторов. Уменьшение расстояния от полоски (с заданной шириной) до плоскости земли при неизменном волновом сопротивлении линии осуществляется посредством уменьшения эффективной диэлектрической проницаемости. В случае обычной микрополосковой линии это означает выбор материала подложки с меньшей проницаемостью. Но это трудно реализуемо, т.к. материал подложки, как правило, выбирается, исходя, в основном из технологических и стоимостных соображений. В результате, для обычных микрополосковых линий, при заданных значениях ширины полосок, разноса между полосками, материала подложки и волнового сопротивления одиночной линии, все возможные пути уменьшения электромагнитной связи оказываются исчерпанными.

Дополнительная возможность появляется, если между подложкой и плоскостью земли расположен изолирующий слой с относительной диэлектрической проницаемостью меньшей, чем у подложки. Это позволяет уменьшать эффективную диэлектрическую проницаемость линии, не изменяя тип материала подложки и сохраняя неизменным волновое сопротивление линии за счёт уменьшения соотношения толщин подложки и изолирующего слоя. Полоски, выполненные на внешней (по отношению к плоскости земли) стороне подложки образуют ППЛ, а на внутренней – ОПЛ (рис. 5.5 а,б, соответственно).

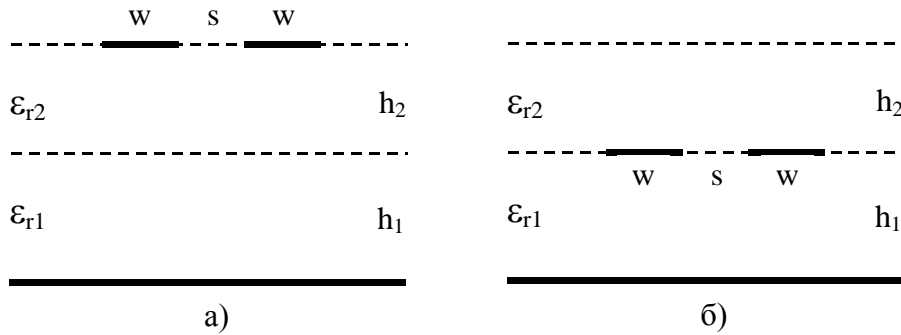


Рис. 5.5. Связанные ППЛ (а) и связанные ОПЛ(б)

На основе вариационного метода для пары связанных линий бесконечно малой толщины были вычислены коэффициенты ёмкостной и индуктивной связи для ППЛ и ОПЛ. Вычисления производились при фиксированных ширинах полосок $w=0,3$ мм и разnose между ними $s=0,325$ мм для относительной диэлектрической проницаемости подложки $\epsilon_{r2}=5,5$ и трёх значений относительной диэлектрической проницаемости изолирующего слоя $\epsilon_{r1}=1;2;3$. Для толщины подложки брались значения $(0,1;0,2;0,3;...)$ мм, для каждого из которых (с помощью программы, реализующей вариационный метод для одиночных линий) вычислялось значение толщины изолирующего слоя, соответствующее волновому сопротивлению одиночной линии 100 Ом.

Известно [206], что в паре связанных линий без потерь уровень перекрёстной помехи на ближнем конце пассивной линии (V_n) прямо пропорционален сумме коэффициентов емкостной и индуктивной связи, а на дальнем конце (V_f) – прямо пропорционален их разности. Для импульса с амплитудой 1 В и с линейно нарастающим фронтом равным двойной задержке распространения импульса в одиночной линии, при конечных нагрузках на всех концах линий, равных волновому сопротивлению одиночной линии, уровень перекрёстной помехи на ближнем конце пассивной линии $V_n \approx (KC+KL)/4$, а на дальнем конце – $V_f \approx (KC-KL)/4$ [207]. Таким образом, известные коэффициенты ёмкостной и индуктивной связи позволяют приближённую оценку перекрёстных помех в паре связанных линий и могут использоваться для сравнения линий с различными параметрами. Зависимость этих величин от относительной толщины подложки h_2/w приведена на рис. 5.6 для ППЛ и рис. 5.7 для ОПЛ [207]. На графиках рис. 5.6 толщины подложки и изолирующего слоя ППЛ изменяются так, что в точке $h_2/w=0$ ППЛ становится микрополосковой линией с диэлектриком из ма-

териала изолирующего слоя, а в точке $h_2/w=3$ ППІ становится микрополосковой линией с диэлектриком из материала подложки.

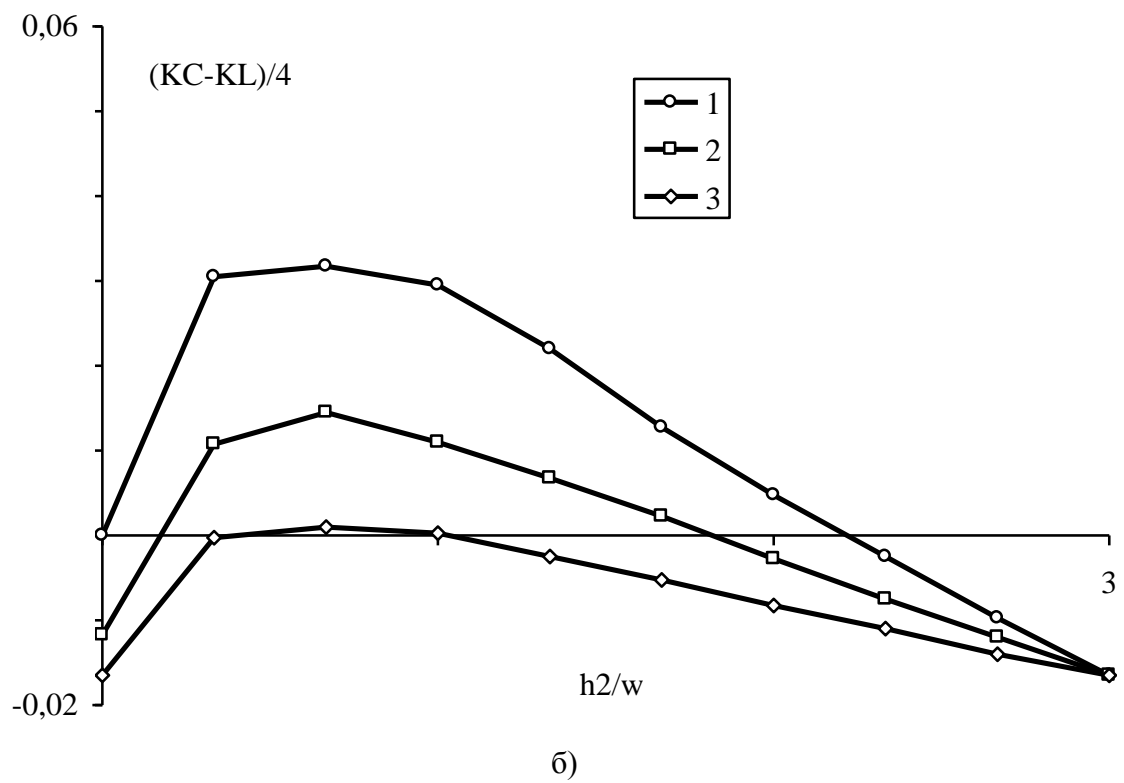
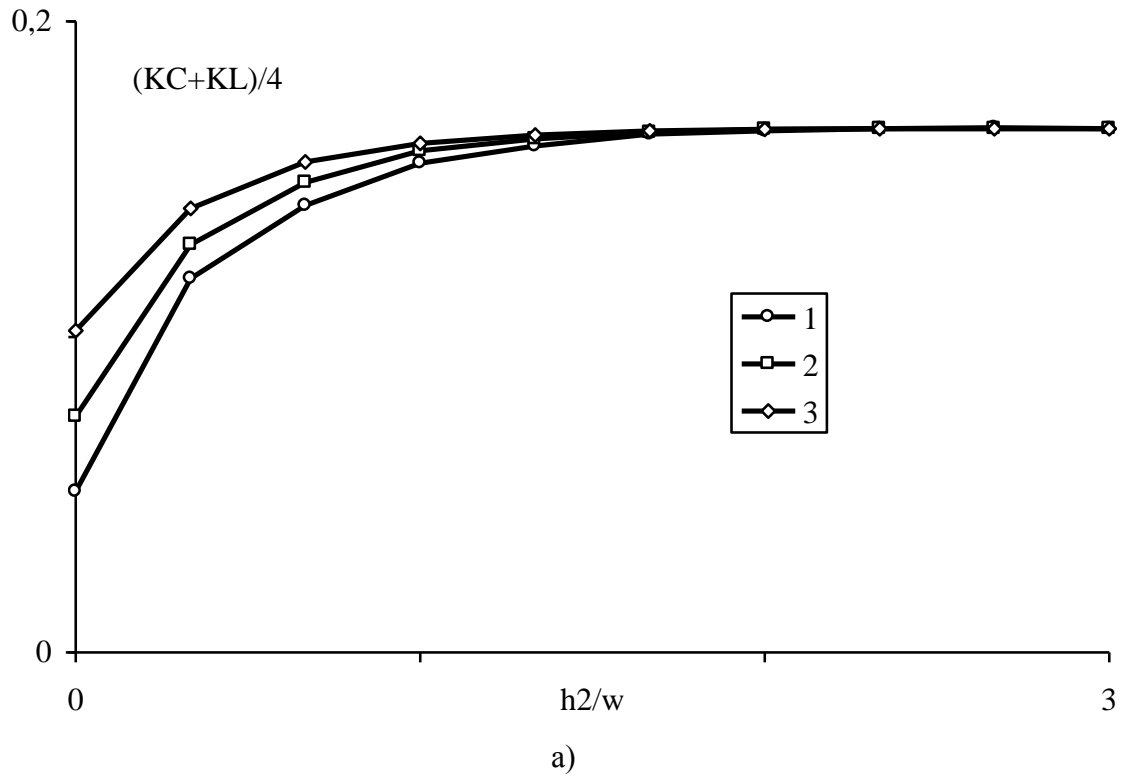
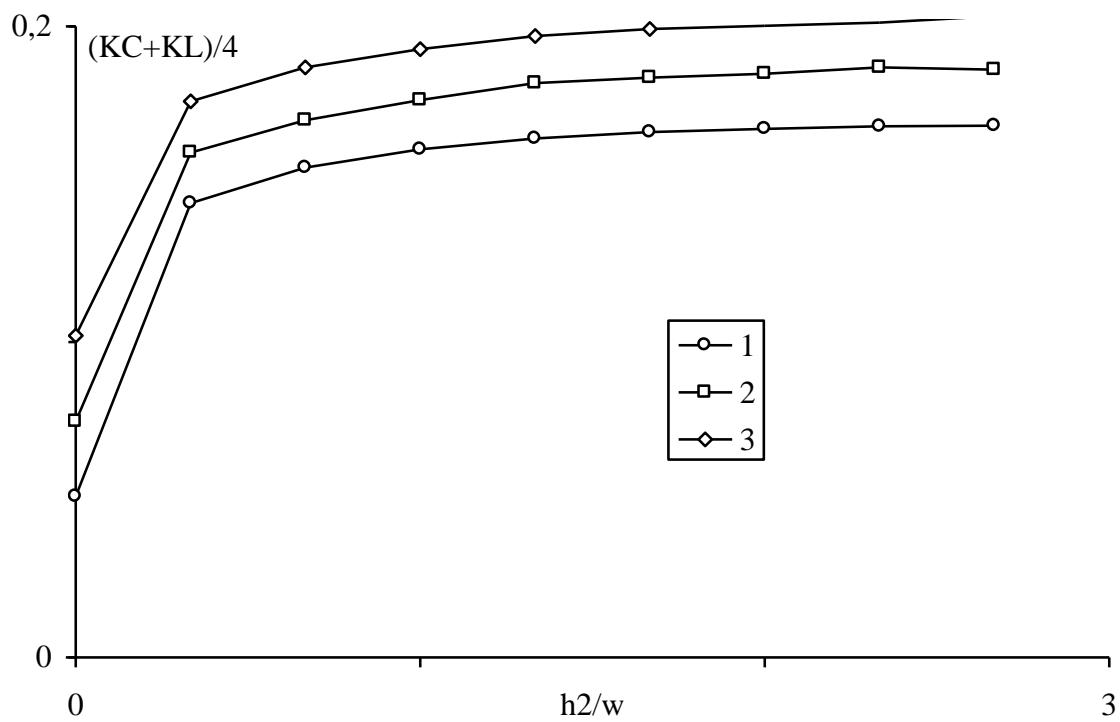
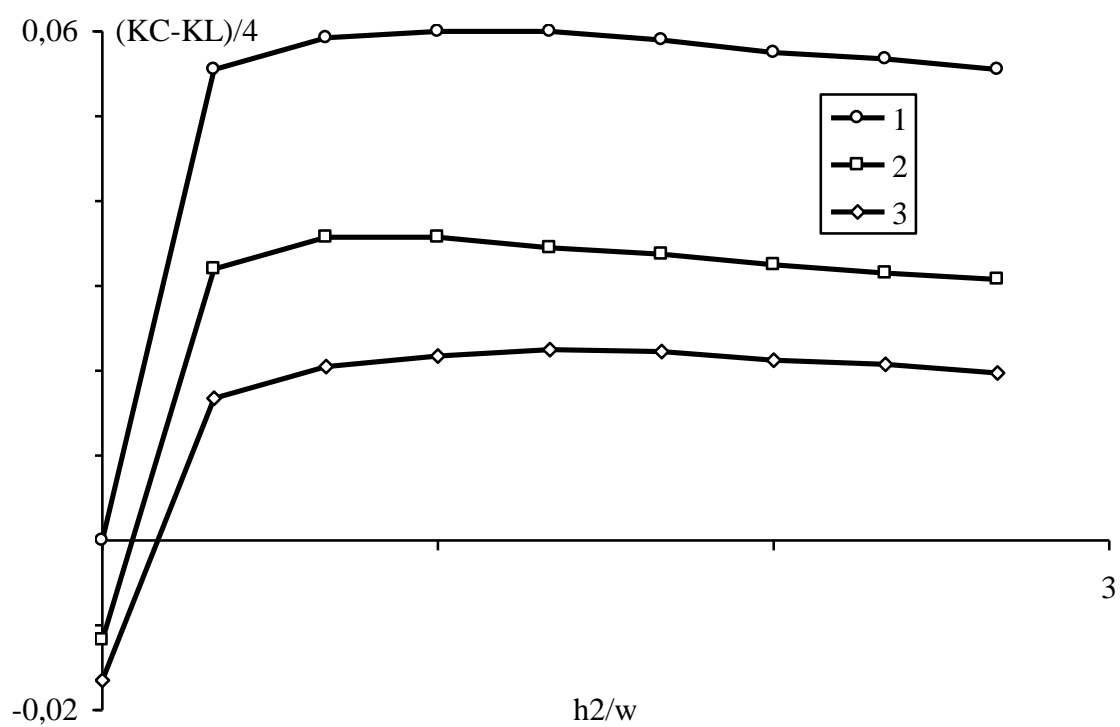


Рис. 5.6. Зависимости уровня перекрёстной помехи на ближнем (а) и дальнем (б) концах пассивной ППЛ от относительной толщины подложки для $\epsilon_{r1}=1,2,3$



a)



б)

Рис. 5.7. Зависимости уровня перекрёстной помехи на ближнем (а) и на дальнем (б) концах пассивной ОПЛ от относительной толщины подложки для $\epsilon_{r1}=1,2,3$

Анализ зависимостей, представленных на обоих рисунках позволяет, сделать следующие выводы.

Существует область значений h_2/w , позволяющая уменьшить перекрёстную помеху на ближнем конце ППЛ, причём тем сильнее, чем меньше значение ϵ_{r1} .

Соответствующий выбор ϵ_{r1} и h_2/w позволяет менять полярность, значительно уменьшать и даже полностью устранять перекрёстную помеху на дальнем конце ППЛ.

Уменьшение ϵ_{r1} и h_2/w позволяет уменьшить перекрёстную помеху на ближнем конце ОПЛ.

Соответствующий выбор ϵ_{r1} и h_2/w позволяет менять полярность, значительно уменьшать и даже полностью устранять перекрёстную помеху на дальнем конце ОПЛ.

Соответствующим выбором параметров подложки и изолирующего слоя ППЛ и ОПЛ можно получить меньшую величину перекрёстных помех, чем в обычной МПЛ на таком же материале подложки и при таких же значениях ширины и разноса полосок, а также волнового сопротивления одиночной линии.

Ёмкостная и индуктивная связи в двух ППЛ и в двух ОПЛ

С помощью программы MOM2, реализующей алгоритм двумерного метода моментов, вычислены матрицы погонных ёмкостных и индуктивных коэффициентов для пар ППЛ и ОПЛ с полосками конечной толщины, показанных на рис. 5.8.

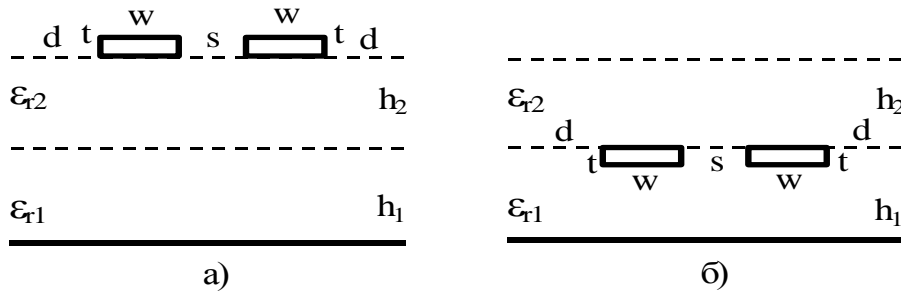


Рис. 5.8. Связанные ППЛ (а) и ОПЛ (б) с полосками конечной толщины

Для того чтобы показать особенности ёмкостной и индуктивной связи рассматриваемых структур, имеющих большое число параметров, значения параметров выбирались следующим образом. Исходя из максимальной плотности межсоединений, ширины (w) и разноса (s) всех полосок взяты одинаковыми. Учитываемые протяжённости (d) диэлектрических границ справа и слева от полосок одинаковы и равны ширине полосок. Таким образом, $s=w=d$. Значение h_2/w изменяется от 0,1 до 1, $\epsilon_{r1}=1;2;3;4$, а $\epsilon_{r2}=5$.

Все вычисления производились при числе подынтервалов на границах диэлектрик-диэлектрик $nd=4$, на границах проводник-диэлектрик по ширине полоски $nw=4$, на границах проводник-диэлектрик по толщине полоски $nt=1$. В табл. 5.1 приведены для сравнения результаты этих вычислений и вычислений при дискретизации в два раза более частой. Различия оказываются в пределах нескольких процентов. Таким образом, выбранная частота дискретизации, по-

звонящая быстрые вычисления, вполне достаточна для первых оценок, а для более точных вычислений необходима более частая дискретизация.

Таблица 5.1

Сравнение дискретизаций

nw : nt	ППЛ		ОПЛ	
	$-C_{21}/C_{11}$	L_{21}/L_{11}	$-C_{21}/C_{11}$	L_{21}/L_{11}
4:1	0,139	0,128	0,140	0,083
8:2	0,144	0,129	0,139	0,084

Для более точного моделирования реальной конфигурации поперечного сечения полосок учтена конечная толщина полосок $t/w=0,1$. А для оценки влияния толщины изолирующего слоя на ёмкостную и индуктивную связи вычисления произведены для двух значений $h_1/w=0,5;1,5$. Результаты вычислений ёмкостного коэффициента $KC=-C_{21}/C_{11}$ и индуктивного коэффициента $KL=L_{21}/L_{11}$ представлены на рис. 5.9 а,б для ППЛ и ОПЛ, соответственно. При этих вычислениях не накладывалось условие неизменности волнового сопротивления одиночной линии. Поэтому изменения параметров диэлектриков изменяют волновое сопротивление и эффективную диэлектрическую проницаемость соответствующей одиночной линии.

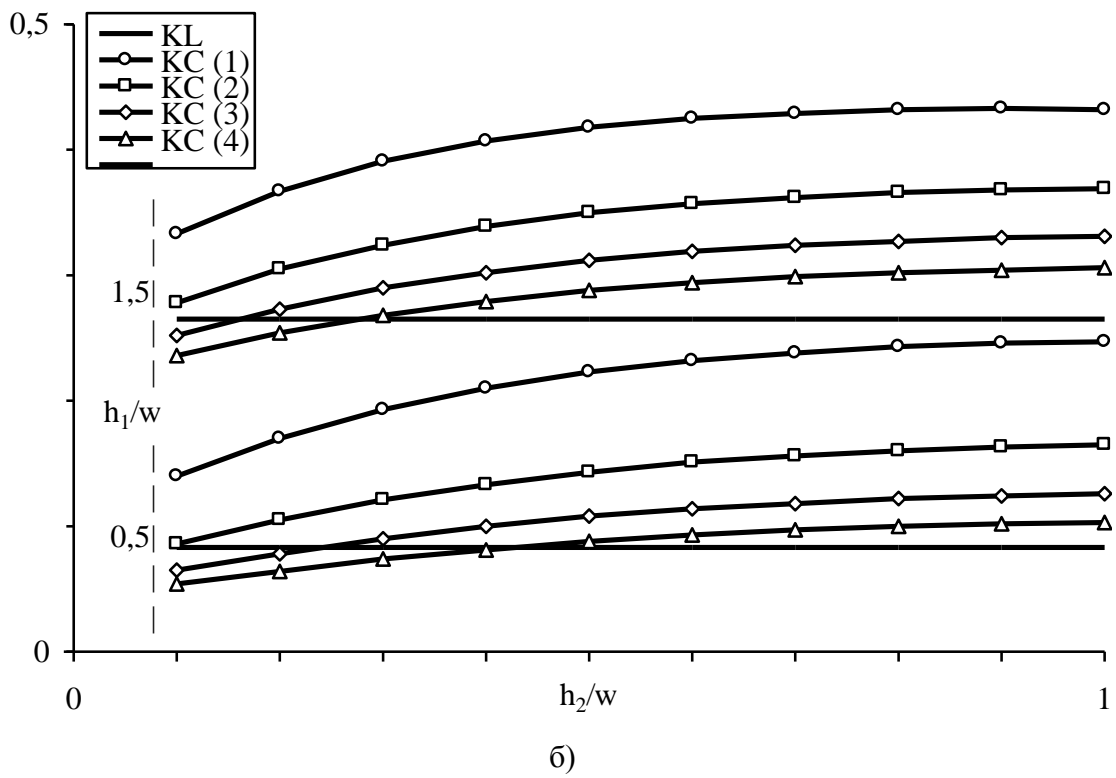
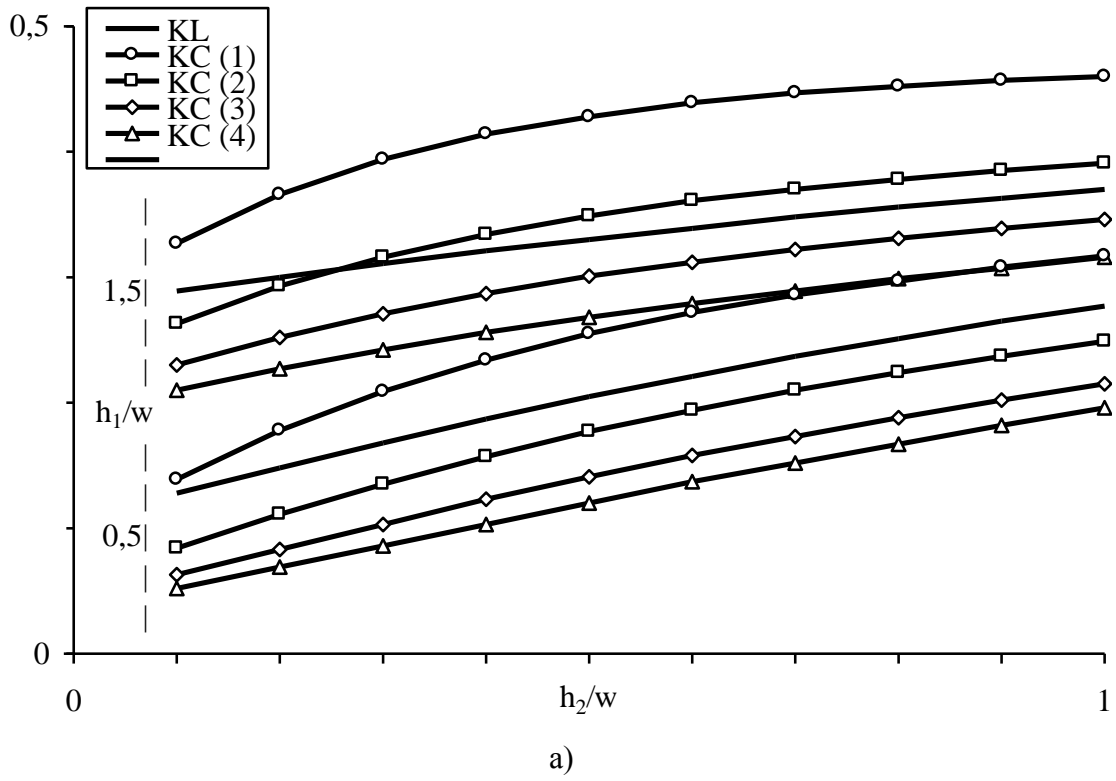


Рис. 5.9. Зависимости KL и KC (для $\varepsilon_{r1}=1,2,3,4$) от h_2/w при $h_1/w=0,5;1,5$ для двух ППЛ (а) и для двух ОПЛ(б)

Поскольку перекрёстная помеха на ближнем конце линии пропорциональна сумме ёмкостного и индуктивного коэффициентов, а на дальнем – их разности, представленные графики позволяют оценить влияние параметров диэлектриков на уровень перекрёстных помех как в паре ППЛ, так и в паре ОПЛ. Из анализа поведения зависимостей, представленных на рисунке, сделаны следующие выводы.

Перекрёстная помеха на ближнем конце снижается при уменьшении h_1/w и h_2/w , или увеличении ϵ_{r1} .

Подбором параметров диэлектриков меняется полярность, уменьшается абсолютная величина или даже полностью устраняется перекрёстная помеха на дальнем конце.

Соответствующий выбор параметров диэлектриков позволяет получить нулевую чувствительность перекрёстной помехи на дальнем конце к изменению толщины подложки.

Для ППЛ возможно одновременно устранить перекрёстную помеху на дальнем конце и получить её нулевую чувствительность к изменению толщины подложки.

Для оценки влияния на ёмкостную и индуктивную связи в ППЛ и ОПЛ такого параметра, как толщина полосок вычисления производились при четырёх значениях отношения толщины к ширине полоски $t/w=0,1;0,2;0,3;0,4$ и соответствующем числе дискрет по толщине полоски $nt=1;2;3;4$ для широкого диапазона значений параметров диэлектриков. Выборка результатов вычислений для одного набора параметров диэлектриков ($h_1/w=0,5; h_2/w=0,1; \epsilon_{r1}=1; \epsilon_{r2}=5$) приведена в табл. 5.2, из которой видно, что рост толщины полосок ППЛ может значительно влиять на ёмкостную и индуктивную связи в ППЛ и ОПЛ. В частности, для ППЛ эти связи могут существенно возрастать, а для ОПЛ – ослабляться. Разность абсолютных значений ёмкостного и индуктивного коэффициентов даже может менять знак (как видно из данных для ППЛ), что соответствует изменению полярности перекрёстной помехи на дальнем конце пассивной линии.

Таблица 5.2

Влияние толщины полосок на ёмкостную и индуктивную связи

t/w	nt	ППЛ		ОПЛ	
		$-C_{21}/C_{11}$	L_{21}/L_{11}	$-C_{21}/C_{11}$	L_{21}/L_{11}
0,1	1	0,139	0,128	0,140	0,083
0,2	2	0,150	0,146	0,124	0,074
0,3	3	0,161	0,164	0,100	0,059
0,4	4	0,172	0,180	0,064	0,037

Ёмкостная и индуктивная связи между ППЛ и ОПЛ

Для уменьшения взаимного влияния межсоединений соседних слоёв печатных плат их располагают во взаимно ортогональных направлениях. Однако для повышения плотности и уменьшения длины межсоединений в некоторых фрагментах разводки межсоединения различных слоёв удобно провести параллельно друг другу. Ёмкостная и индуктивная связи при этом сильно возрастают

и требуют своей оценки, например, для определения максимально допустимой длины связанных линий при заданном уровне перекрёстных помех.

В случае ПТМП такая оценка проведена с помощью программы MOM2, допускающей не только планарное, но и произвольное расположение проводников. Минимальный разнос полосок, расположенных на разных слоях, не ограничен шириной полоски, как в планарном случае. Поэтому связь между ППЛ и ОПЛ определена для трёх случаев разноса проводников (рис. 5.10). Ёмкостный и индуктивный коэффициенты вычислены по формулам

$$KC = \frac{-C_{2,1}}{\sqrt{C_{1,1} \cdot C_{2,2}}}; \quad KL = \frac{L_{2,1}}{\sqrt{L_{1,1} \cdot L_{2,2}}},$$

где C_{ij} и L_{ij} , $i, j=1, 2$ – вычисленные программой MOM2 элементы матриц погонных ёмкостных и индуктивных коэффициентов, соответственно.

Зависимости KC и KL от h_2/w представлены на рис. 5.11 тремя группами графиков, обозначенными буквами а), б), в) в соответствии с рис. 5.10 (а, б, в). Вычисления производились для $\epsilon_{r1}=1, 2, 3, 4$ при $\epsilon_{r2}=5$; $h_1/w=0, 5$; $t/w=0, 1$; $w=d$. Для всех границ использовалась эквидистантная дискретизация с числом подынтервалов равным 2 на длине t и 5 на длинах w и d .

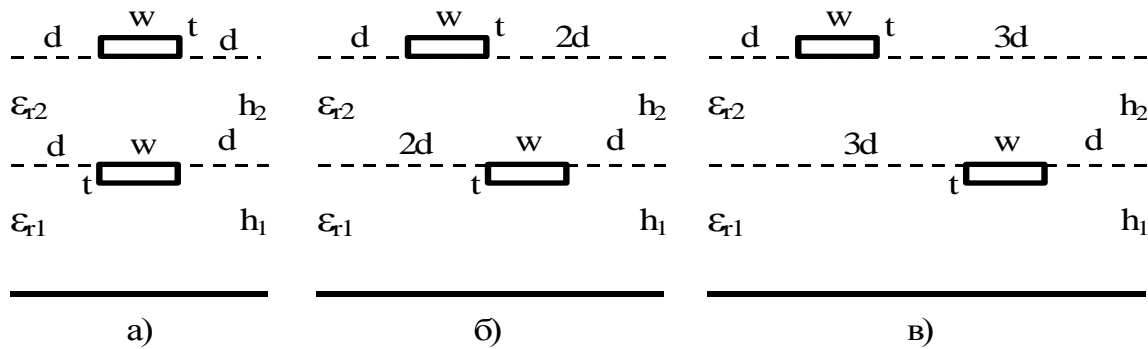


Рис. 5.10. Три конфигурации связанных ППЛ и ОПЛ

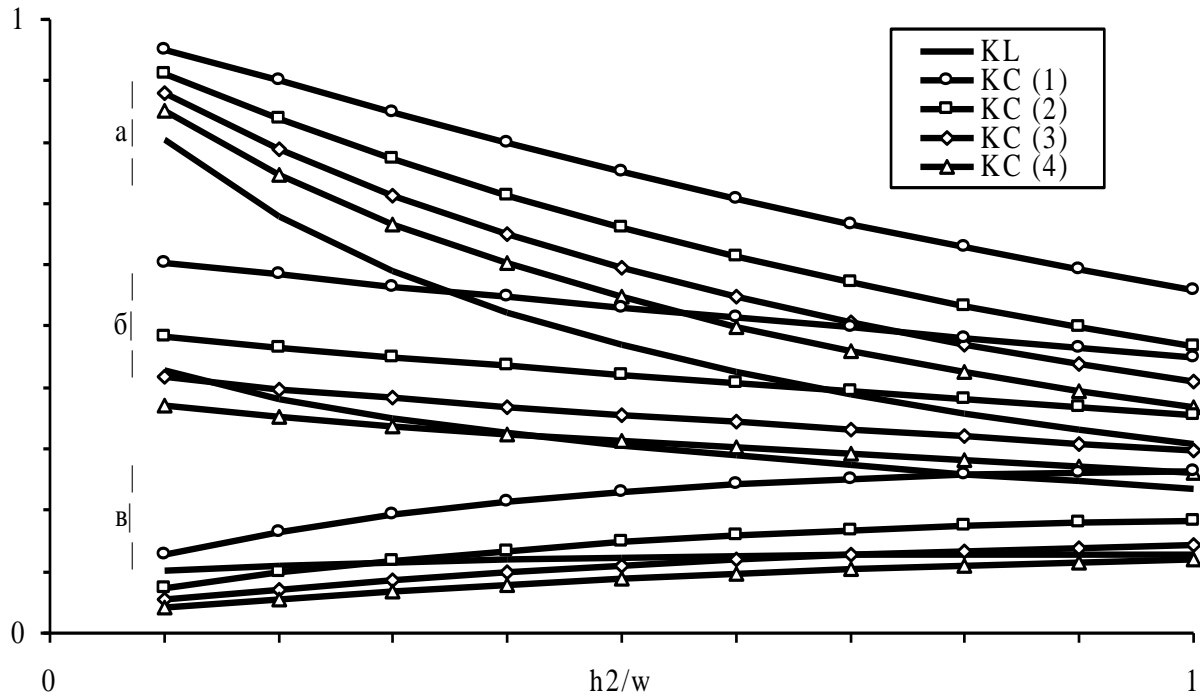


Рис. 5.11. Зависимости KL и KC (для $\epsilon_{r1}=1,2,3,4$) от h_2/w для связанных ППЛ и ОПЛ из рис. 5.10 (а,б,в)

Анализ поведения графиков, а также суммы и разности ёмкостных коэффициентов позволили сделать ряд выводов относительно перекрёстных помех в связанных ППЛ и ОПЛ.

Уменьшение ϵ_{r1} и разноса линий увеличивает перекрёстную помеху на ближнем конце.

В отличие от связанных ППЛ и связанных ОПЛ существует такая область значений параметров линии, в которой уменьшение h_2/w не уменьшает, а увеличивает перекрёстную помеху на ближнем конце.

Соответствующий выбор параметров линий меняет полярность, уменьшает абсолютную величину и даже полностью устраняет перекрёстную помеху на дальнем конце.

Выбором параметров линий можно минимизировать чувствительность перекрёстных помех на ближнем и дальнем концах к изменению толщины подложки.

5.2.3 Многопроводные межсоединения

Программа MOM2 позволяет вычислять параметры не только двух связанных линий, но и системы, состоящей из нескольких проводников. Для межсоединений это позволяет учесть влияния не только соседних, но и остальных близлежащих проводников. Полученные матрицы [L] и [C] используются для оценки перекрёстных помех в межсоединениях посредством строгого вычисления отклика или (после соответствующего анализа значений их элементов) упрощаются, например, приводятся к трёхдиагональному виду для применения более быстрых методов вычисления отклика.

Выполнено моделирование для пяти проводников. Рассмотрено три случая: пять ППЛ, пять ОПЛ, а также три ППЛ и две ОПЛ, расположенных в шахматном порядке.

Ёмкостная и индуктивная связи в пяти ППЛ и в пяти ОПЛ

Конфигурации пяти ППЛ и пяти ОПЛ представлены на рис. 5.12 (а,б). Вычисления выполнены при $w=s=d$; $t/w=0,1$; $\epsilon_{r1}=1$; $\epsilon_{r2}=5$ для двух значений $h_1/w=0,5; 1,5$. Для всех границ использована эквидистантная дискретизация с числом подынтервалов равным 1 на длине t и 4 на длинах w и d .

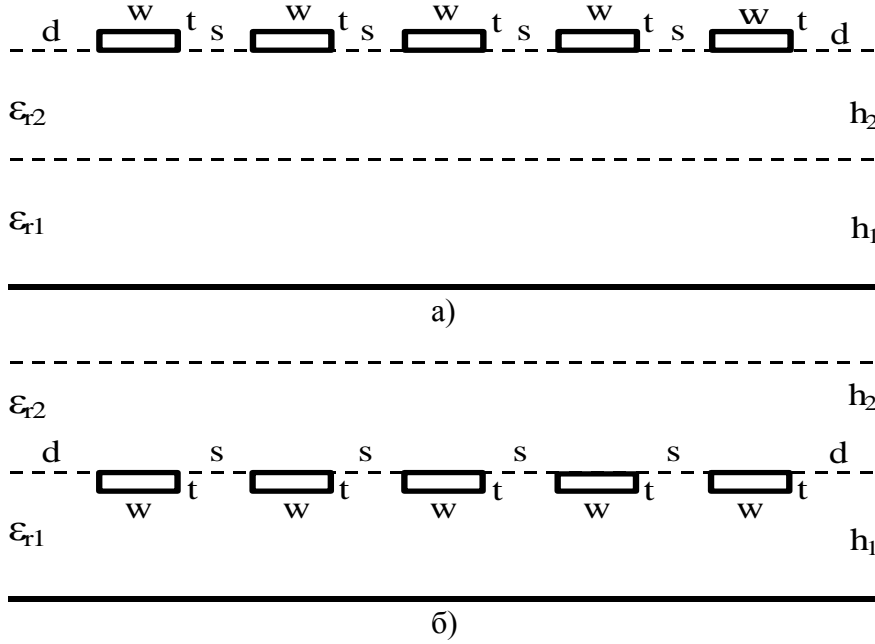


Рис. 5.12. Пять ППЛ (а) и пять ОПЛ (б)

Результатом вычисления по программе MOM2, в этом случае, являются две симметричные матрицы [C] и [L] размером 5*5. Для нормального восприятия при представлении результатов использованы данные только первого столбца этих матриц. Причём приведены только взаимные элементы, характеризующие связь первого проводника со вторым, третьим, четвёртым и пятым, нормированные к собственному элементу первого проводника. Представленные значения называются здесь коэффициентами связи и выражаются следующими формулами.

$$KC1i = \frac{-C_{1,i}}{C_{1,1}}; \quad KL1i = \frac{L_{1,i}}{L_{1,1}}, \quad i=2,3,4,5,$$

где $C_{1,i}$ и $L_{1,i}$, $i=1,2,3,4,5$ – вычисленные программой MOM2 элементы матриц погонных ёмкостных и индуктивных коэффициентов, соответственно. Значения ёмкостных и индуктивных коэффициентов связи (в логарифмической шкале) для пяти ППЛ представлены на рис. 5.13, а для пяти ОПЛ – на рис. 5.14.

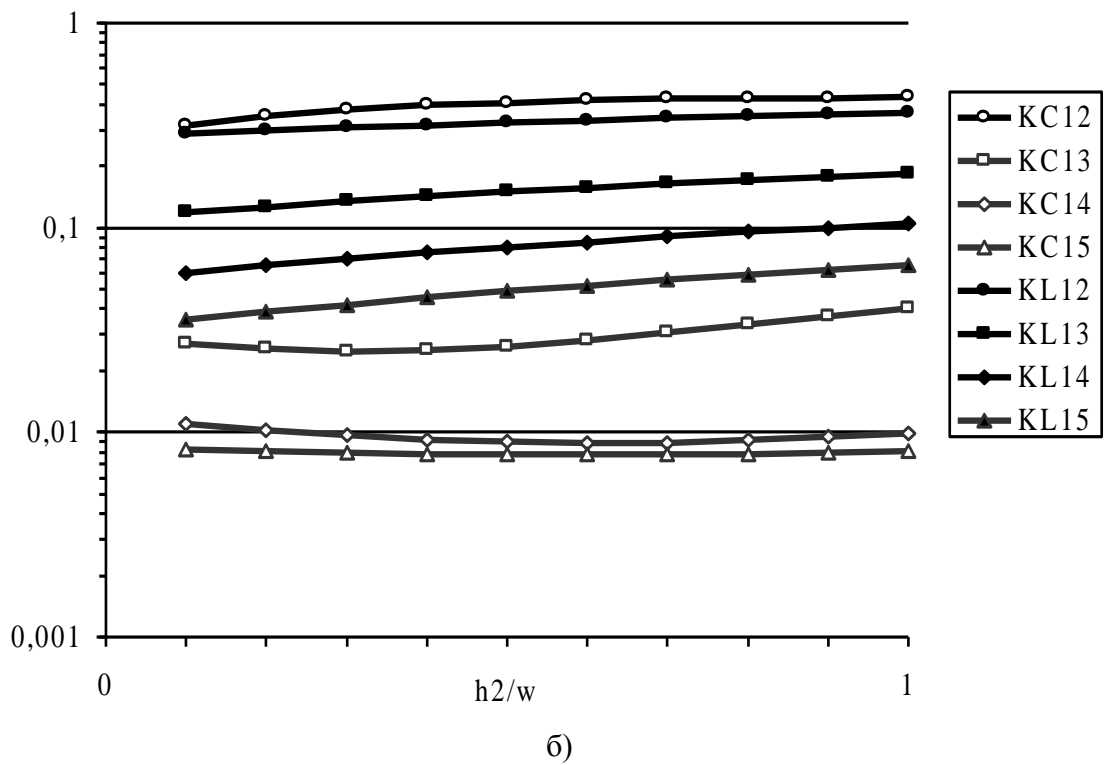
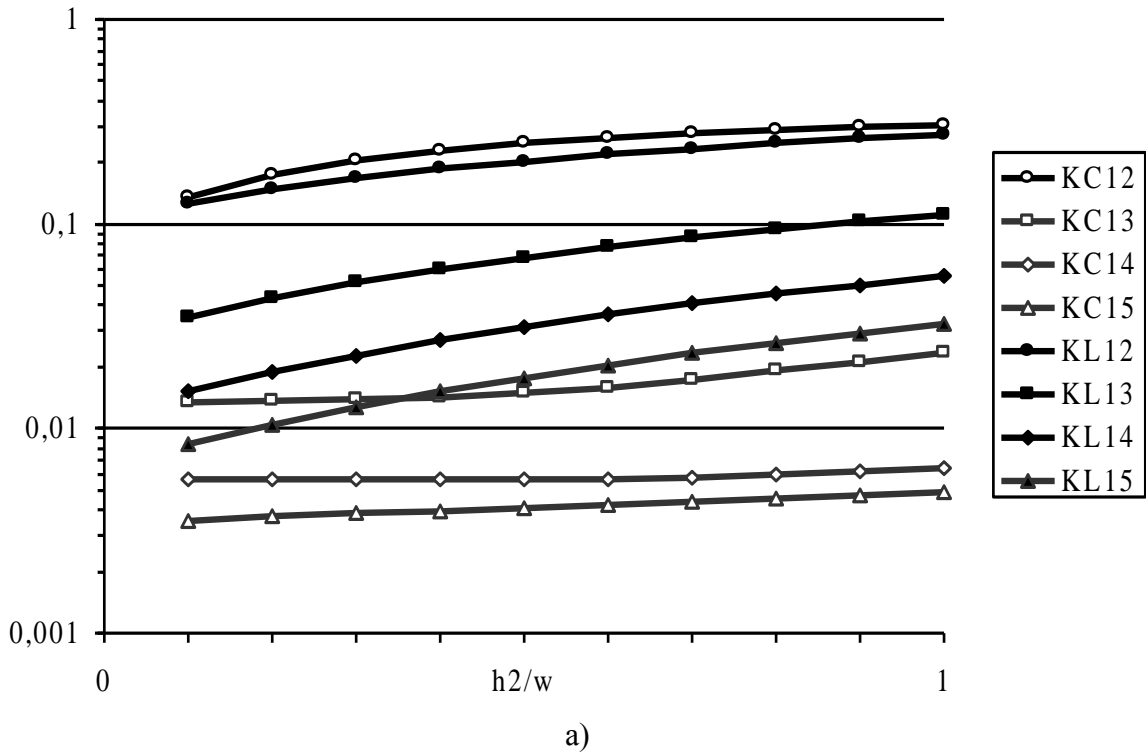


Рис. 5.13. Зависимости ёмкостной и индуктивной связей от относительной толщины подложки для пяти ППЛ при $h_1/w=0,5$ (а) и при $h_1/w=1,5$ (б)

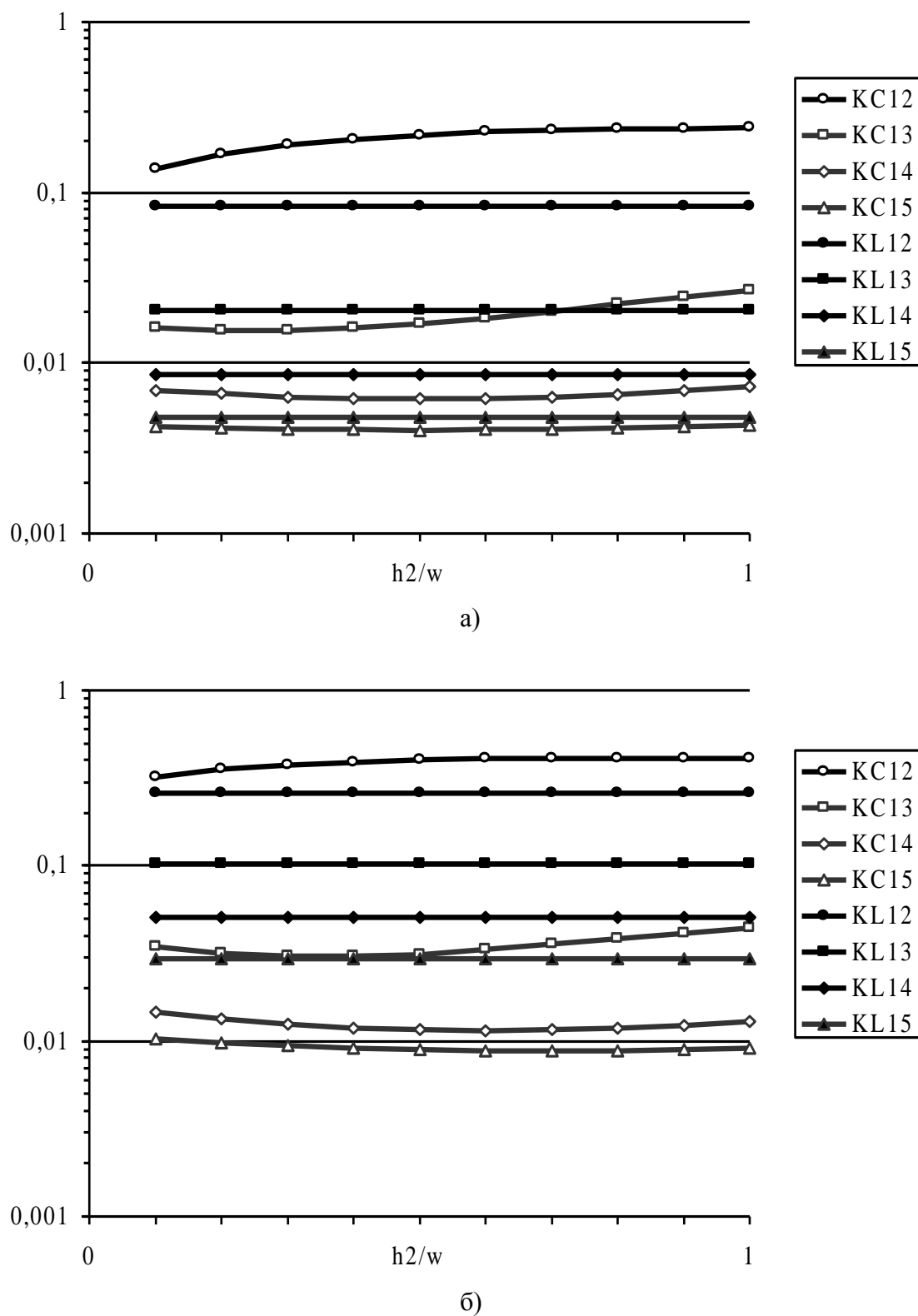


Рис. 5.14. Зависимости ёмкостной и индуктивной связей от относительной толщины подложки для пяти ОПЛ при $h_1/w=0,5$ (а) и при $h_1/w=1,5$ (б)

Графики позволяют сравнить между собой ёмкостные и индуктивные коэффициенты различных проводников и сделать выводы о достаточности учёта только ближайшего проводника или необходимости учёта последующих. Конечно, для рассматриваемых случаев, когда все проводники имеют одинаковые ширины и толщины, одинаково разнесены друг от друга и расположены на одной высоте от плоскости земли, естественно предполагать доминирующее влияние ближайшего проводника, что и наблюдается на графиках. Однако специфика ППЛ и ОПЛ проявляется в следующем.

Существует область параметров ППЛ и ОПЛ, в которой влияние проводника, следующего за ближайшим, может быть существенным. Например, значения коэффициентов связи могут быть около 0,1.

Существует область параметров ППЛ и ОПЛ, в которой увеличение h_2/w не увеличивает, а уменьшает некоторые ёмкостные коэффициенты.

Подобно случаю двух связанных линий ёмкостная связь между различными полосками может быть больше, чем индуктивная.

Ёмкостная и индуктивная связи в трёх ППЛ и двух ОПЛ

Одним из вариантов расположения параллельных ППЛ и ОПЛ является шахматный порядок с двойной плотностью монтажа. Пример такой конфигурации, состоящей из трёх ППЛ и двух ОПЛ, показан на рис. 5.15.

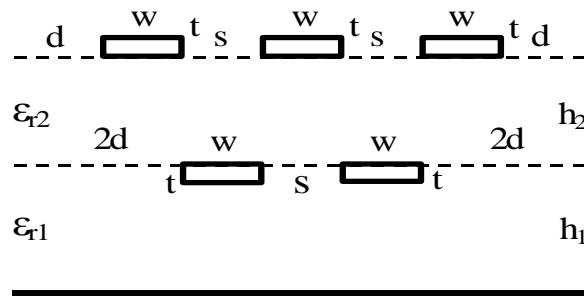


Рис. 5.15. Три ППЛ и две ОПЛ, расположенные в шахматном порядке

Вычисления для данной конфигурации выполнены при $w=s=d$; $t/w=0,1$; $\epsilon_{r1}=1$; $\epsilon_{r2}=5$; $h_1/w=0,5$. Для всех границ использована эквидистантная дискретизация с числом подынтервалов равным 2 на длине t и 5 на длинах w и d . Ёмкостные и индуктивные коэффициенты вычислены по следующим формулам.

$$KCLi = \frac{-C_{1,i}}{\sqrt{C_{1,1} \cdot C_{i,i}}}; \quad KLIi = \frac{L_{1,i}}{\sqrt{L_{1,1} \cdot L_{i,i}}}, \quad i=2,3,4,5,$$

где $C_{1,i}$ и $L_{1,i}$, $i=1,2,3,4,5$ – вычисленные программой МОМ2 элементы матриц погонных ёмкостных и индуктивных коэффициентов, соответственно.

На рис. 5.16 показаны зависимости вычисленных коэффициентов от h_2/w . Графики позволяют сравнить между собой ёмкостные и индуктивные коэффициенты различных проводников и отметить следующие особенности.

В отличие от предыдущих случаев, для первого проводника ближайшими становятся два проводника, 2-й и 3-й, а следующими – 4-й и 5-й, т.к. чётко видна сопоставимость коэффициентов связи этих пар проводников.

Существует область параметров, в которой влияние проводников, следующих за двумя ближайшими, существенно. Например, значения коэффициентов связи близки к 0,1.

Существует область параметров, в которой увеличение h_2/w не увеличивает, а уменьшает некоторые коэффициенты.

Подобно случаю двух связанных линий ёмкостная связь между различными полосками может быть больше, чем индуктивная.

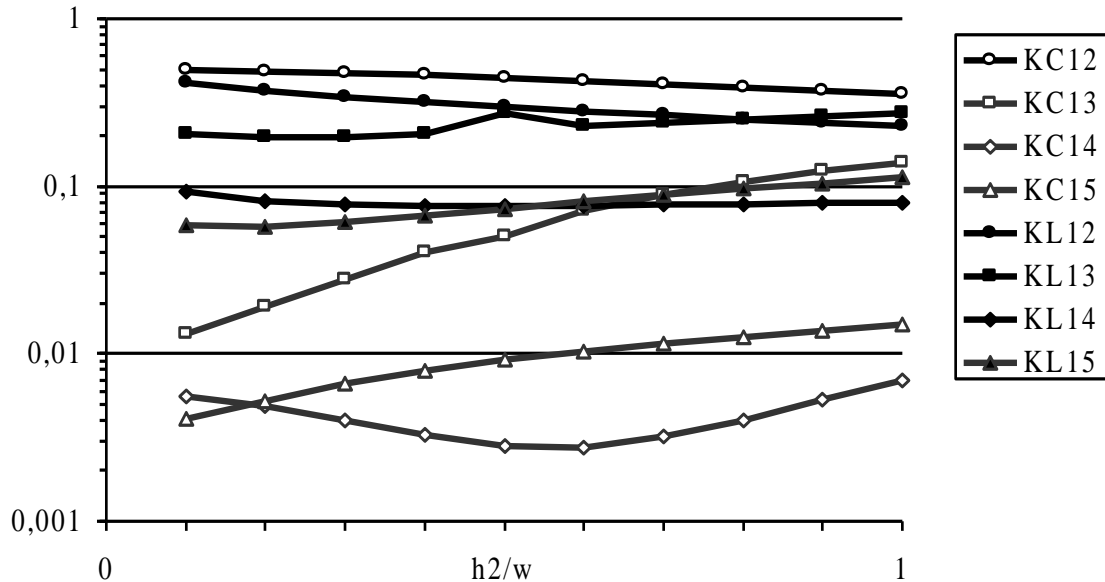


Рис. 5.16. Зависимости ёмкостной и индуктивной связей от относительной толщины подложки для трёх ППЛ и двух ОПЛ

5.2.4 Основные результаты раздела

Обнаружен ряд новых закономерностей поведения характеристик различных полосковых линий передачи с двухслойным диэлектриком.

Одиночные межсоединения

Показана возможность получения нулевой чувствительности волнового сопротивления ППЛ к изменению толщины подложки.

Показана возможность получения нулевой чувствительности эффективной диэлектрической проницаемости:

для ППЛ к изменению толщины подложки;

для ОПЛ к изменению толщины изолирующего слоя.

Показана возможность уменьшения эффективной диэлектрической проницаемости:

для ППЛ и ОПЛ за счёт уменьшения относительной диэлектрической проницаемости изолирующего слоя;

для ППЛ за счёт уменьшения толщины подложки;

для ОПЛ за счёт уменьшения толщины изолирующего слоя.

Связанные межсоединения

Соответствующим выбором параметров подложки и изолирующего слоя получена меньшая величина перекрёстных помех в связанных ППЛ и связан-

ных ОПЛ, чем в обычных связанных МПЛ на таком же материале подложки при тех же значениях ширины и разноса полосок, а также волнового сопротивления одиночной линии.

Изменение толщины полосок существенно влияет на перекрёстные помехи в связанных ППЛ и связанных ОПЛ.

Соответствующий выбор параметров диэлектриков изменяет полярность, уменьшает абсолютную величину и даже полностью устраняет перекрёстную помеху на дальнем конце в связанных ППЛ, в связанных ОПЛ и связанных ППЛ и ОПЛ.

В связанных ППЛ и ОПЛ, в отличие от связанных ППЛ и связанных ОПЛ, существует такая область значений параметров линии, в которой уменьшение h_2/w не уменьшает, а увеличивает перекрёстную помеху на ближнем конце.

Многопроводные межсоединения

Для многопроводной ППЛ и многопроводной ОПЛ существует область параметров, в которой влияние проводника, следующего за ближайшим, оказывается существенным и аппроксимация реальных матриц трёхдиагональными может дать некорректные результаты перекрёстной помехи на ближнем и особенно на дальнем конце.

Для многопроводных ППЛ и ОПЛ ближайшими становятся два проводника. В этом случае аппроксимация реальных матриц трёхдиагональными может дать некорректные результаты перекрёстной помехи и на ближнем, и на дальнем конце.

5.3 Уменьшение дальней перекрёстной помехи в межсоединениях с двухслойным диэлектриком

Проблема уменьшения перекрёстных помех особенно актуальна для длинных связанных межсоединений в неоднородной диэлектрической среде. В этом случае величина перекрёстной помехи на дальнем конце пассивной линии может быть много большей, чем на ближнем конце [208].

Для уменьшения величины дальней перекрёстной помехи можно выравнивать модальные задержки распространения или ёмкостную и индуктивную связи в межсоединениях с некоторыми типами поперечного сечения. Например, такие возможности были показаны для плоских кабелей [209], для двух связанных подвешенных линий с воздушным зазором [210], для двух связанных микрополосков на двух диэлектрических слоях [211], для двух связанных микрополосков на одиночном и двойном анизотропных слоях [212].

Непосредственное использование этих возможностей в печатных платах (например, имеющих межсоединения в двухслойном диэлектрике над плоскостью земли [213]) возможно, но затруднено из-за произвольности межсоединений, образованных, в общем случае, многочисленными отрезками многопроводных линий передачи, имеющими разные типы, параметры поперечного сечения и длины. Для преодоления этих трудностей необходимо шире исследовать возможности уменьшения дальней перекрёстной помехи.

В этом разделе, основанном на работе автора [214], представляются обобщённые и кратко изложенные результаты некоторых недавних исследований

[215–219], показывающие возможности уменьшения дальней перекрёстной помехи для разнообразных структур связанных межсоединений с двухслойным диэлектриком.

5.3.1 Допущения

Точное моделирование потерь в проводниках и диэлектриках может быть важным для линий передачи, вообще [220], и для случая вычисления дальней перекрёстной помехи в двух связанных линиях с выровненными скоростями чётной и нечётной мод, в частности [221]. Но в этом разделе рассматриваются связанные линии без потерь и дисперсии по следующим соображениям.

Потери и дисперсия в связанных микрополосках рассмотрены весьма обстоятельно [222]. Отмечено, в частности, что для большинства случаев потери и дисперсия из-за плоскости земли и диэлектрика с потерями пренебрежимо малы по сравнению с сигнальными проводниками. Также показано, что потери в сигнальных проводниках: значительно уменьшаются с ростом толщины проводников; приблизительно одинаковы для разных мод в линиях; могут очень мало зависеть от частоты.

Исследована дисперсия в двух связанных микрополосках на двух диэлектрических слоях, когда у нижнего диэлектрическая постоянная много меньше, чем у верхнего [211]. Показано, что если разница между эффективными диэлектрическими постоянными чётной и нечётной мод минимизирована, то она остаётся пренебрежимо малой в широком диапазоне частот, в результате, минимизируя дальнюю перекрёстную помеху. Продемонстрирована адекватная TEM аппроксимация для дальней перекрёстной помехи от распространения импульса со временем нарастания и спада в 15 пс [223].

Характерные особенности межсоединений печатных плат и двухслойной диэлектрической среды могут сильно уменьшить потери и дисперсию. Например, межсоединения печатных плат имеют, как правило, относительно толстые проводники (например, толщина может достигать 0,1 мм при ширине менее 0,2 мм). Задержку сигнала и диэлектрические потери в межсоединениях печатных плат снижают выбором подложек с малыми диэлектрическими проницаемостями и потерями. Кроме того, при двухслойной диэлектрической среде (когда, уже выбран, например из технологических соображений, фольгированный с двух сторон диэлектрический материал подложки с проводниками) существует дополнительная возможность выбора нефольгированного материала с меньшими потерями для другого диэлектрика. К тому же правильный выбор высот диэлектриков значительно уменьшит общие потери и дисперсию линий [224]. (При воздушном зазоре между подложкой и плоскостью земли TEM аппроксимация адекватна вплоть до 100 ГГц [225].)

Таким образом, в обычных структурах печатных плат потери для различных мод связанных межсоединений малы и примерно одинаковы. Следовательно, они вызывают пренебрежимо малые различия в характеристиках распространения этих мод. Это означает, что, даже если потери важны для оценки реальной величины перекрёстной помехи, ими можно пренебречь при оценке компенсации перекрёстной помехи.

Наконец, необходимо обратиться к неоднородностям на стыках некоторых многоотрезковых структур, рассматриваемых в этом разделе. Их влияние на дальнюю перекрёстную помеху может быть значительным и даже использоваться для ее уменьшения [226]. Однако необходимо отметить, что это влияние сильно зависит от конкретных типов и параметров этих неоднородностей. Их точное трёхмерное моделирование, в общем случае, является не простым, поскольку оно требует полноволнового конечно-разностного анализа во временной области [227] или анализа, использующего эквивалентные схемы частичных элементов [228]. Для некоторых конкретных неоднородностей могут использоваться чисто статические матричные методы, плоско параллельные модели или некоторые комбинации вышеуказанных методов [229]. Чтобы исследовать влияние на дальнюю перекрёстную помеху именно параметров отрезков межсоединений, влияние различных конкретных неоднородностей здесь не рассматриваются. Хотя модели, используемые для вычисления, позволяют учёт влияния неоднородностей, которые можно приближённо описать сосредоточенными параллельными ёмкостями. Величины этих ёмкостей, в свою очередь, могут быть вычислены по новым моделям, основанным на методе моментов для трёхмерных структур.

5.3.2 Условия нулевой дальней перекрёстной помехи в структурах двух связанных линий

Следуя подходу чётной и нечётной моды [230–232], дальняя перекрёстная помеха

$$V_{\text{FAR}}(t)=[V^e(t)-V^o(t)]/2, \quad (5.1)$$

где $V^e(t)$ и $V^o(t)$ – формы сигнала на конце структуры, вычисленные для одиночной линии, имеющей параметры чётной и нечётной мод, соответственно. Из этой формулы видно, что дальняя перекрёстная помеха равна нулю, если эти формы сигнала совпадают. В свою очередь, для этого совпадения необходимы одинаковые амплитуды чётной и нечётной мод на конце структуры и одновременный приход этих мод к концу структуры.

Необходимо отметить, что строгое удовлетворение первому условию может быть не простым даже в случае одного отрезка связанных линий. Часто используют приближённое согласование посредством одинаковых резистивных нагрузок на землю на четырёх концах структуры. Значение этих нагрузок выбирается равным характеристическому импедансу соответствующей одиночной линии или равным корню квадратному из произведения импедансов чётной и нечётной мод. Для строгого согласования этот отрезок должен оканчиваться на начале и на конце резистивными схемами, согласующими как чётную, так и нечётную моды [233]. Однако в случае структуры, состоящей из многочисленных последовательно соединённых отрезков связанных линий, оконечные нагрузки согласуют только начало первого отрезка и конец последнего отрезка, тогда как согласования между отрезками, как правило, нет.

Известна приближённая оценка значений перекрёстных помех для различных окончаний одного отрезка связанных линий [234]. Однако на практике дальняя перекрёстная помеха из-за неравных амплитуд мод на конце структуры

может быть минимизирована посредством надлежащих нагрузок в начале и на конце структуры, малой разницы между характеристическими импедансами соседних отрезков линий, а также малой разницы между характеристическими импедансами мод одного и того же отрезка связанных линий в случае слабой связи. В результате, составляющая дальней перекрёстной помехи из-за неравных амплитуд мод будет мала, как это и наблюдалось в многочисленных примерах моделирования [215–219]. Для всех результатов моделирования, использованных в этом разделе, на каждом из четырёх концов всех рассматриваемых структур полагались одинаковые 50-омные резистивные нагрузки.

Удовлетворить второму условию нулевой дальней перекрёстной помехи, как правило, труднее. Этой проблемы нет для связанных межсоединений в однородном диэлектрическом заполнении, где погонные задержки чётной и нечётной мод равны друг другу. Но диэлектрическое заполнение реальных межсоединений часто является неоднородным. Небольшая разница в задержках распространения мод даёт дальнюю перекрёстную помеху, величина которой будет возрастать с ростом длины структуры вплоть до половины амплитуды более быстрой моды [235], как это видно из (5.1). Поэтому в случае длинных многоотрезковых межсоединений в неоднородной диэлектрической среде является особенно важным исследование различных возможностей выравнивания задержек распространения чётной и нечётной мод, описываемого уравнением

$$\sum_{i=1}^n (\tau_{0_i}^e - \tau_{0_i}^o) \cdot \ell_i = 0, \quad (5.2)$$

где n – общее число последовательно соединённых отрезков связанных линий; $\tau_{0_i}^{e,o}$ – погонная задержка распространения чётной и нечётной мод в i -м отрезке связанных линий; ℓ_i – длина i -го отрезка.

5.3.3 Компенсация дальней перекрёстной помехи в последовательно соединённых отрезках межсоединений

В качестве частного случая неоднородной диэлектрической среды рассматривается двухслойная диэлектрическая среда. В этой среде могут существовать, например, обращённая, подвешенная, покрытая микрополосковые линии.

Идея компенсации состоит в следующем. Как показано в предыдущих разделах, ёмкостная связь подвешенных или обращённых микрополосковых линий может быть больше, меньше или равна индуктивной связи, в соответствии с параметрами этих линий. Следовательно, дальняя перекрёстная помеха, являясь приблизительно пропорциональной разности ёмкостной и индуктивной связей [234], будет иметь положительную или отрицательную полярность в соответствии с параметрами и типом линий. Для общего случая последовательно соединённых отрезков связанных межсоединений очевидно предположить следующее. Если разница ёмкостной и индуктивной связей в одном отрезке имеет знак противоположный разнице ёмкостной и индуктивной связей в другом отрезке, то возможна частичная или полная компенсация дальней перекрёстной помехи. Количественное выражение этого условия, представляющего приближённо точное условие (5.2), можно записать как

$$\sum_{i=1}^n (K_{C_i} - K_{L_i}) \cdot \tau_{0_i} \cdot \ell_i = 0, \quad (5.3)$$

где $K_{C_i} - K_{L_i}$ – разность ёмкостной и индуктивной связей в i -м отрезке; τ_{0_i} – среднее погонных задержек распространения в i -м отрезке, когда каждая из двух линий рассматривается одиночной; ℓ_i – длина i -го отрезка.

Чтобы проверить это допущение, прежде всего, для конкретных отрезков двух связанных линий посредством программы, основанной на двумерном методе моментов [236], были вычислены матрицы погонных ёмкостных коэффициентов $[C]$ и индуктивных коэффициентов $[L]$. Используемые модели позволяют анализировать проводники конечного поперечного сечения в слоистой диэлектрической среде над бесконечно проводящей плоскостью. Затем из вычисленных элементов матриц $[C]$ и $[L]$ были получены значения ёмкостной ($K_C = -C_{2,1}/C_{1,1}$) и индуктивной ($K_L = L_{2,1}/L_{1,1}$) связей. Наконец, с помощью аналитических моделей для периодических структур, состоящих из последовательно соединённых отрезков линий без потерь [230], и с помощью численных моделей в частотной области для аналогичных структур с произвольными параметрами [232] были получены формы сигнала дальней перекрёстной помехи для различных структур, рассматриваемых в последующих разделах.

Два последовательно соединённых отрезка связанных линий с различными разносами

Известно, что при трассировке межсоединений высокой плотности разнос соседних межсоединений выбирают минимальным, если величина перекрёстной наводки остаётся в допустимых пределах. Однако существуют не очень плотные участки трассировки, на которых разнос увеличивают, чтобы уменьшить перекрёстные помехи. Таким образом, может появиться простая структура, состоящая, по крайней мере, из двух последовательно соединённых отрезков связанных межсоединений с различными разносами. Пример такой структуры для случая обращённых линий показан на рис. 5.17. Для проверки возможности компенсации дальней перекрёстной помехи в такой структуре было выполнено вычисление параметров линии и вычисление отклика.

Высоты первого и второго (от плоскости земли) диэлектрических слоёв (H_{d1} и H_{d2}) таковы, что $H_{d1}/W=0,5$ и $H_{d2}/W=0,09$, а относительные диэлектрические проницаемости, соответственно, $\epsilon_{r1}=2$ и $\epsilon_{r2}=5$. Внешним диэлектриком является воздух. Относительные магнитные проницаемости всех диэлектриков равны единице. Все полоски имеют одинаковую толщину (T) и одинаковую ширину (W), причём $T/W=0,1$. Расстояние от внешних сторон полосок (D), учитываемое в вычислениях, равно W .

Разница ($K_C - K_L$) ёмкостной и индуктивной связей двух обращённых линий в зависимости от отношения разноса к ширине S/W показана на рис. 5.18. Отметим, что около $S/W=1$ функция меняет знак, а около $S/W=2,0$ и $S/W=0,8$ функция имеет приблизительно одинаковые абсолютные значения, но противоположные знаки. В соответствии с предлагаемым способом уменьшения дальней перекрёстной помехи, можно полагать, что для двух равных отрезков таких

связанных линий с разносами около $S/W=2,0$ и $S/W=0,8$ должен наблюдаться эффект полной компенсации дальней перекрёстной помехи.

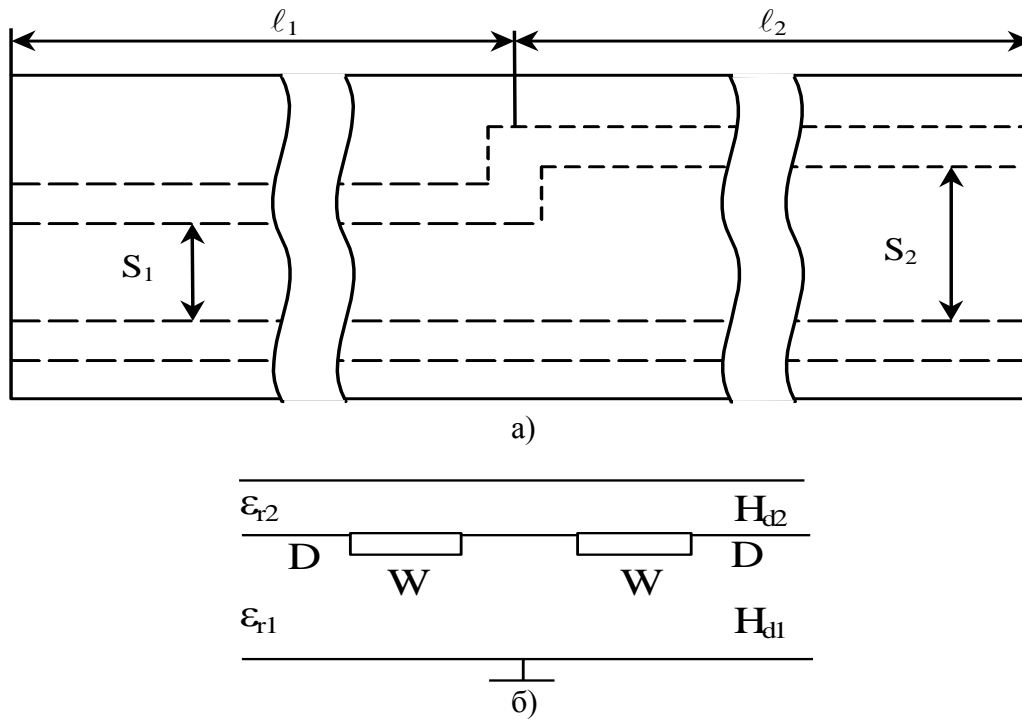


Рис. 5.17. Два последовательно соединённых отрезка связанных обращённых линий с различными разносами линий: вид сверху (а); поперечное сечение (б)

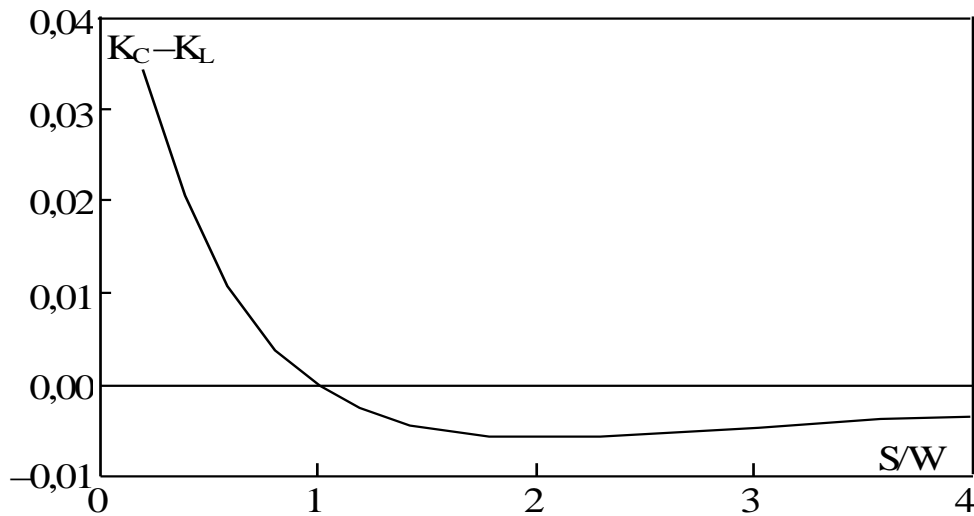


Рис. 5.18. Зависимость $(K_C - K_L)$ связанных обращённых линий от S/W

На рис. 5.19 показаны формы дальней перекрёстной помехи для рис. 5.17 ($l_1=l_2=10$ см), вычисленные для разносов линий во втором отрезке $S_2/W=2,0; 1,8 \dots 0,4$ при разноре линий в первом отрезке $S_1/W=2,0$. В начале активной линии полагался входной сигнал с фронтом $t_f=10$ пс, линейно нарастающим до величины $V_{in0}=10$ В.

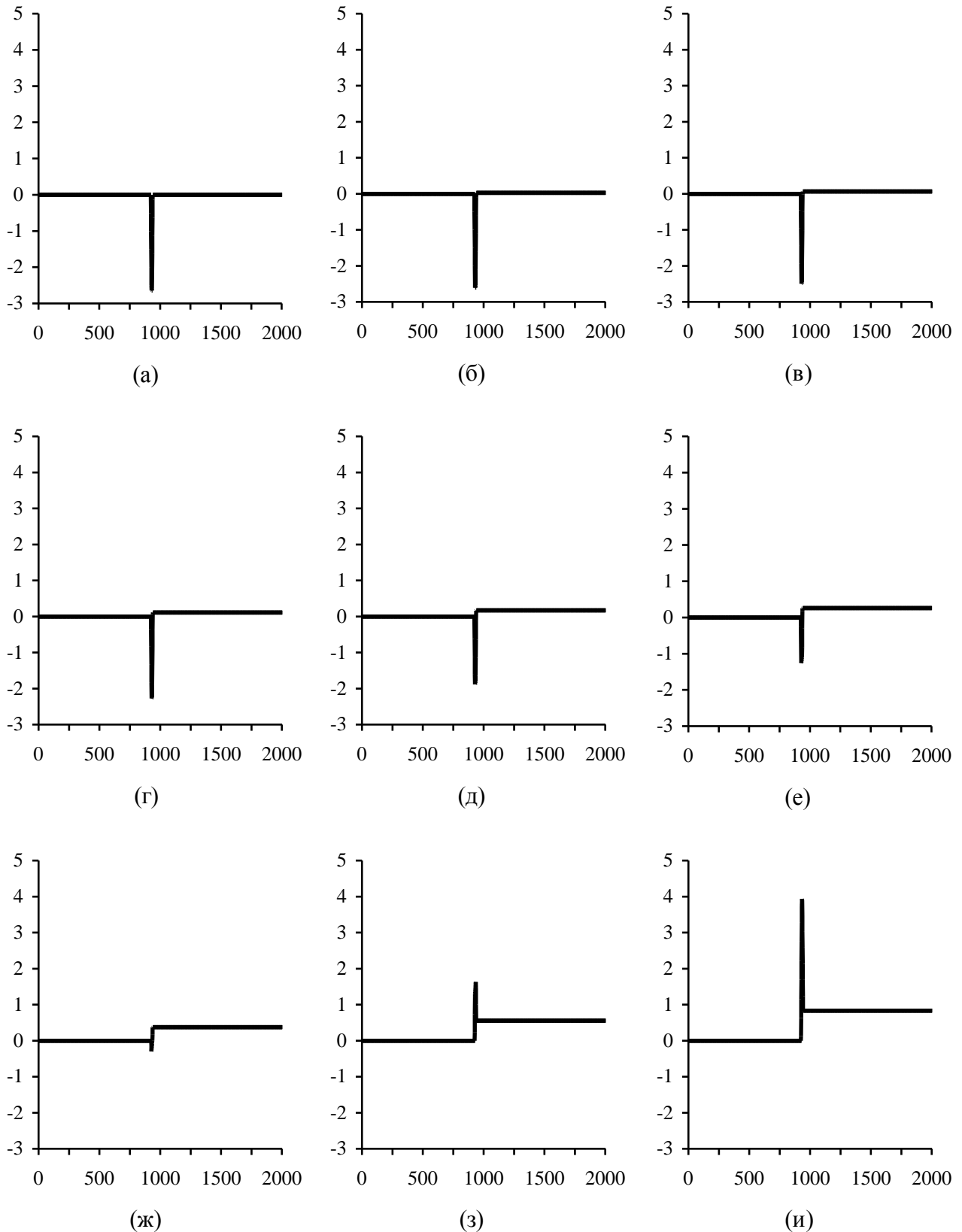


Рис. 5.19. Вычисленные формы дальней перекрёстной помехи (В, пс) для двух последовательно соединённых отрезков связанных обращённых полосковых линий при $S_2/W=2,0; 1,8 \dots 0,4$ (а–и) ($S_1/W=2,0$, $l_1=l_3=10$ см, $V_{in0}=10$ В, $t_r=10$ пс)

Рассмотрим рис. 5.19 подробно. Для $S_2/W=2,0$ (а), наблюдается высокое отрицательное значение дальней перекрёстной помехи. Его уменьшение в диапазоне $S_2/W=2,0 \dots 1,6$ (а,б,в) пренебрежимо мало, в соответствии с тем же диапазоном на рис. 5.18. Дальнейшее изменение более значительно: около $S/W=0,8$ (ж) наблюдается эффект полной компенсации дальней перекрёстной помехи. Уменьшение S_2/W до 0,4 демонстрирует дальнюю перекрёстную помеху большой величины и положительной полярности, которая является результатом перекомпенсации дальней перекрёстной помехи первого отрезка линий дальней перекрёстной помехой второго отрезка линий с меньшим разносом линий. Для наглядности сводная зависимость пикового значения дальней перекрёстной помехи (V_{FAR}) от S_2/W показана на рис. 5.20.

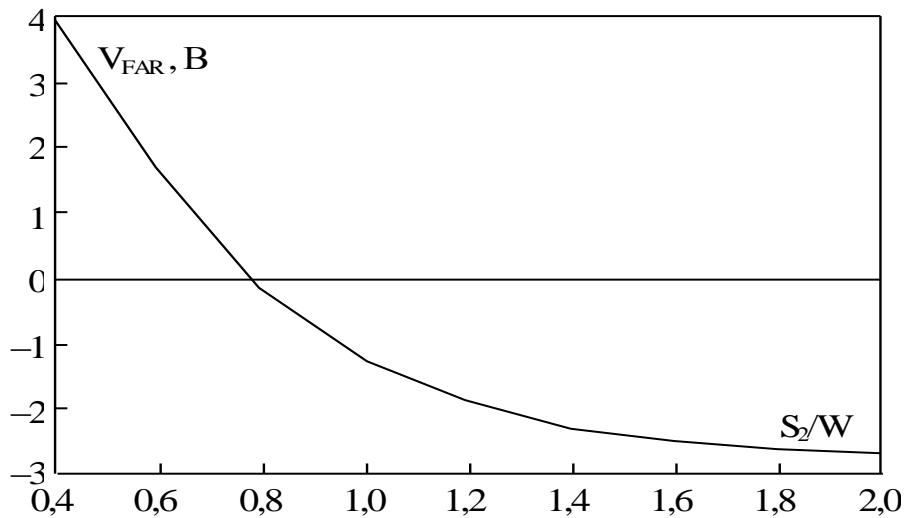


Рис. 5.20. Зависимость V_{FAR} от S_2/W при $S_1/W=2,0$

Отметим, что обнаруженный эффект может показаться довольно неожиданным, поскольку линии приближаются друг к другу, а дальняя перекрёстная помеха при этом не увеличивается, а уменьшается. Однако, особенность поведения графика на рис. 5.18 и результаты компьютерного моделирования форм помехи показывают возможность эффекта компенсации. Подобный эффект может иметь место не только для обращённых, но и для подвешенных линий, но невозможен для обычных микрополосковых линий.

Отметим и другую важную особенность поведения графика на рис. 5.18 – возможность минимальной, вплоть до нулевой, чувствительности K_C-K_L к изменению S/W . Можно полагать, что возможна и минимизация значения K_C-K_L в точке нулевой чувствительности. Более детальное исследование этих возможностей легко выполнить, а его результаты могут быть широко использованы.

Последовательно соединённые отрезки связанных обращённых микрополосковых линий и связанных подвешенных микрополосковых линий

В предыдущих разделах рассмотрена перекрёстная помеха в печатной плате с двухслойным диэлектриком, межсоединения которой образованы ППЛ и ОПЛ. Показано, что дальней перекрёстной помехи в связанных парах таких линий может вовсе не быть при любой длине связанных линий, если ёмкостная и

индуктивная связи в них уравнены. Но это имеет место только для определённых параметров диэлектрика отрезка связанных ППЛ или связанных ОПЛ.

Длинное межсоединение, например реальной печатной платы, может состоять из двух, трёх или более отрезков линий, соединённых друг с другом сквозными отверстиями. В печатной плате с двухслойным диэлектриком сигнал распространяется, например, от управляющего выхода вдоль ОПЛ и затем через сквозное отверстие вдоль ППЛ к приёмному порту (рис. 5.21). Учитывая способность разности ёмкостной и индуктивной связей в таких линиях иметь различные знаки, можно предположить дополнительную возможность уменьшения дальней перекрёстной помехи в многоотрезковых межсоединениях печатной платы с двухслойным диэлектриком.

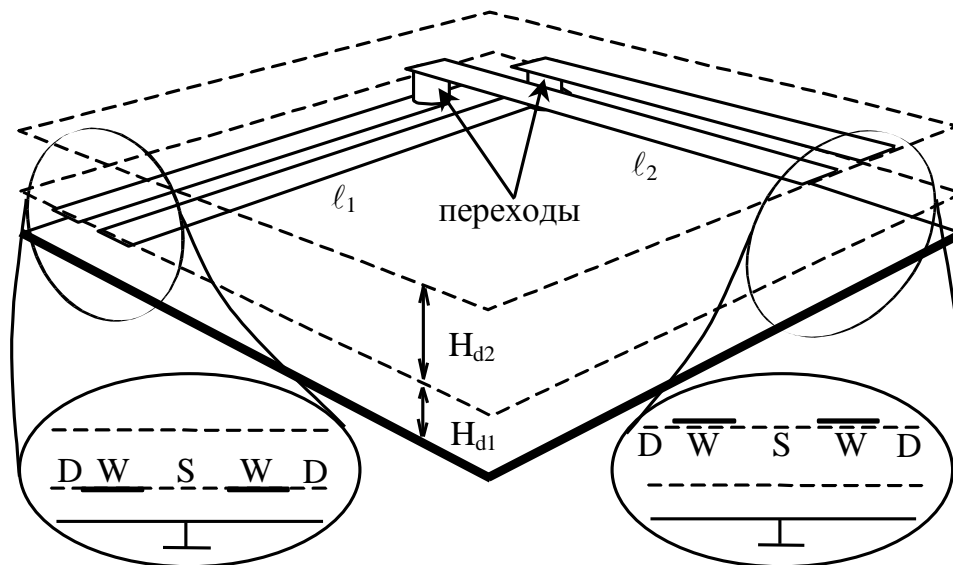


Рис. 5.21. Два последовательно соединённых отрезка связанных обращённых микрополосковых линий и связанных подвешенных микрополосковых линий

Для проверки этого предположения были вычислены ёмкостная и индуктивная связи для обеих линий с параметрами $\epsilon_{r1}=2$; $\epsilon_{r2}=5$; $T/W=0,1$; $D=S=W$; $H_{d1}/W=0,5$; $H_{d2}/W=0,01 \dots 1$. Разница ёмкостной и индуктивной связей ($K_C - K_L$) в зависимости от H_{d2}/W для обеих линий показана на рис. 5.22. Отметим, что около $H_{d2}/W=0,09$ значение функции для ОПЛ изменяет знак, тогда как около $H_{d2}/W=0,28$ абсолютные значения обеих функций равны, а знаки противоположны.

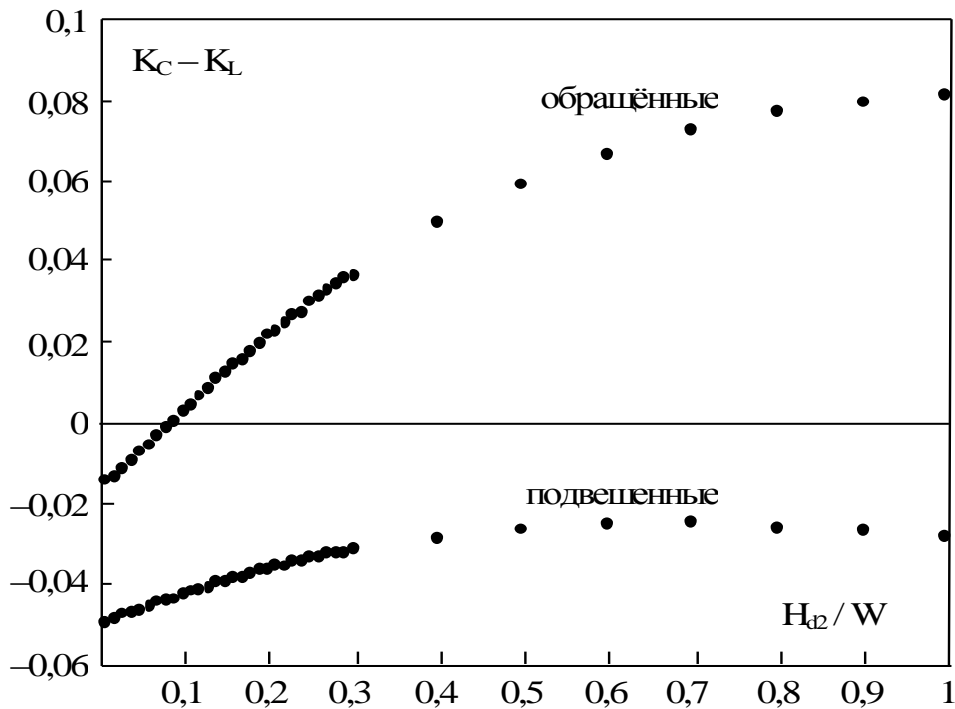


Рис. 5.22. Зависимости $(K_C - K_L)$ связанных ППЛ и связанных ОПЛ от H_{d2}/W

Такое поведение коэффициентов связи можно использовать для уменьшения дальней перекрёстной помехи следующим образом. Анализ зависимостей рис. 5.22 позволяет предположить следующее. Для структуры из двух одинаковых по длине отрезков связанных ОПЛ и связанных ППЛ, показанной на рис. 5.21, результирующее значение дальней перекрёстной помехи пропорционально сумме вкладов ОПЛ и ППЛ. Каждый из этих вкладов, в свою очередь, пропорционален значению $(K_C - K_L)$ соответствующей линии. Следовательно (см. рис. 5.22), при увеличении H_{d2}/W от 0,01 до 0,09 результирующее значение дальней перекрёстной помехи будет уменьшаться, поскольку уменьшаются вклады обеих линий. Однако около $H_{d2}/W=0,09$ вклад ОПЛ становится минимальным. При увеличении H_{d2}/W от 0,09 до 0,28 результирующее значение дальней перекрёстной помехи увеличится, отчасти потому, что вклад ППЛ медленно уменьшается, но в основном потому, что вклад ОПЛ увеличивается с обратным знаком. Здесь будет иметь место явление частичной компенсации дальней перекрёстной помехи ППЛ перекрёстной помехой ОПЛ, а около $H_{d2}/W=0,28$ будет наблюдаться эффект полной компенсации дальней перекрёстной помехи. При увеличении H_{d2}/W от 0,28 до 1 результирующее значение дальней перекрёстной помехи будет возрастать, отчасти потому, что вклад ППЛ медленно уменьшается, но в основном потому, что вклад ОПЛ возрастает с обратным знаком. Здесь будет иметь место явление перекомпенсации дальней перекрёстной помехи ППЛ дальней перекрёстной помехой ОПЛ, приводящее к изменению полярности результирующей дальней перекрёстной помехи.

Для проверки основанного на рис. 5.22 качественного анализа поведения дальней перекрёстной помехи при изменении H_{d2}/W выполнено компьютерное моделирование отклика на входной сигнал с линейно нарастающим фронтом для схемы, состоящей из двух отрезков связанных линий с ёмкостью на стыке.

Для минимизации влияния рассогласования в начале и на конце активной и пассивной линий включены сопротивления 50 Ом. Строгий учёт влияния ёмкостной неоднородности требует анализа трёхмерной конфигурации стыка отрезков и здесь не производится. Поэтому для минимизации её влияния ёмкость неоднородности C_d в вычислениях полагается для обеих мод равной 0,01 пФ. Длины отрезков линий полагаются одинаковыми ($l_1=l_2=100$ мм). Сигнал на входе активной ОПЛ изменяется от нуля до $V_{in0}=10$ В с линейно нарастающим фронтом $t_r=10$ пс.

Для ряда значений H_{d2}/W были вычислены формы дальней перекрёстной помехи, показывающие компенсацию дальней перекрёстной помехи. На рис. 5.23 приведены три примера. График (а) для $H_{d2}/W=0,01$ демонстрирует дальнюю перекрёстную помеху большой отрицательной величины. Эффект полной компенсации дальней перекрёстной помехи виден на графике (б), вычисленном для $H_{d2}/W=0,28$. График (в) для $H_{d2}/W=1$ показывает дальнюю перекрёстную помеху большой положительной величины.

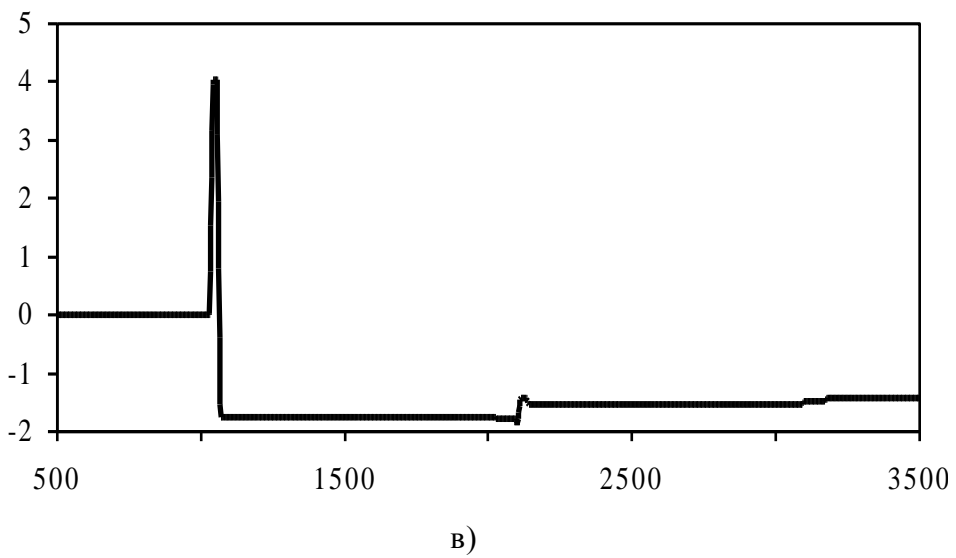
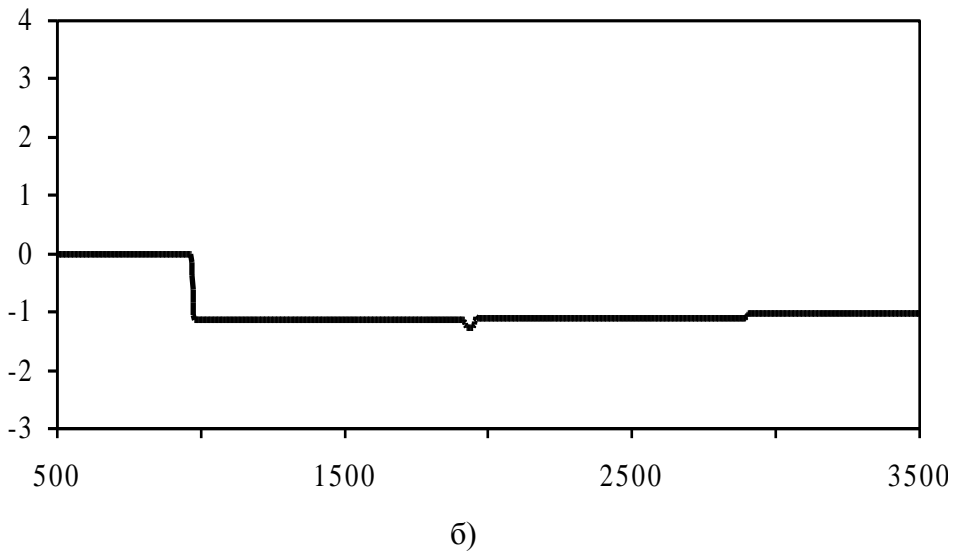
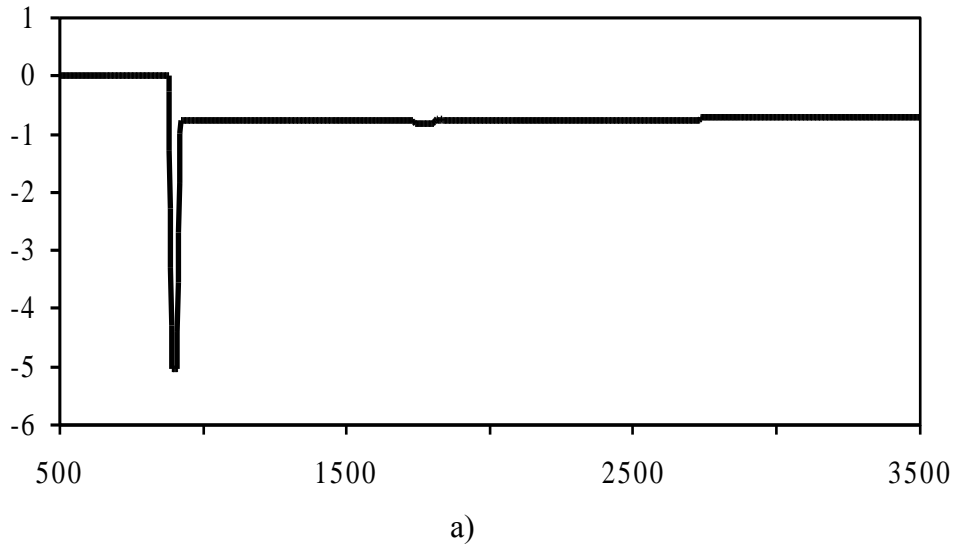


Рис. 5.23. Форма (В, пс) дальней перекрёстной помехи для $H_{d2}/W = 0,01$ (а); $0,28$ (б); 1 (в).

Для более детального исследования рассматривалась и зависимость компенсации дальней перекрёстной помехи от длин отрезков. Структура из рис. 5.21 исследовалась при длине отрезка ОПЛ $\ell_1=5$ см, а ППЛ – $\ell_2=2; 4; 6; 8; 10$ см. Вычислялись формы дальней перекрёстной помехи по значениям ёмкостной и индуктивной связей из рис. 5.22 для $H_{d2}/W=0,2; 0,3; 0,4$, которые показаны в соответствующих столбцах табл. 5.3. Из неё ясно виден эффект компенсации дальней перекрёстной помехи ОПЛ дальней перекрёстной помехой ППЛ. Графики первой строки для $\ell_2=2$ см показывают частичную компенсацию, дающую положительное значение пика помехи. При росте ℓ_2 может наблюдаться полная компенсация. На графиках предпоследней строки для $\ell_2=10$ см видна перекомпенсация помехи, приводящая к отрицательному значению её пика. В последней строке табл. 5.3 показаны формы дальней перекрёстной помехи для ℓ_2 , вычисленной по формуле (5.3) из условия полной компенсации дальней перекрёстной помехи. Как видно из графиков, при этих значениях пик помехи минимален, что подтверждает достоверность формулы для оценки параметров линий, при которых наступает полная компенсация дальней перекрёстной помехи.

Формы (В,пс) дальней перекрёстной помехи для двух последовательно соединённых отрезков связанных линий ($\ell_1=5$ см, $V_{in0}=10$ В, $t_r=10$ пс)

ℓ_2 , см	$H_{d2}/W=0,2$	$H_{d2}/W=0,3$	$H_{d2}/W=0,4$
2			
4			
6			
8			
10			
Полная компенсация	$\ell_2=2,8$ см 	$\ell_2=5,6$ см 	$\ell_2=8,4$ см

Для наглядности сводные зависимости пиковых значений дальней перекрёстной помехи V_{FAR} в от l_2 для различных $H_{d2}/W=0,2; 0,3; 0,4$ показаны на отдельном графике рис. 5.24 (окружностями). Ясно видна возможность компенсации дальней перекрёстной помехи связанных ОПЛ дальней перекрёстной помехой связанных ППЛ за счёт выбора параметров этих линий.

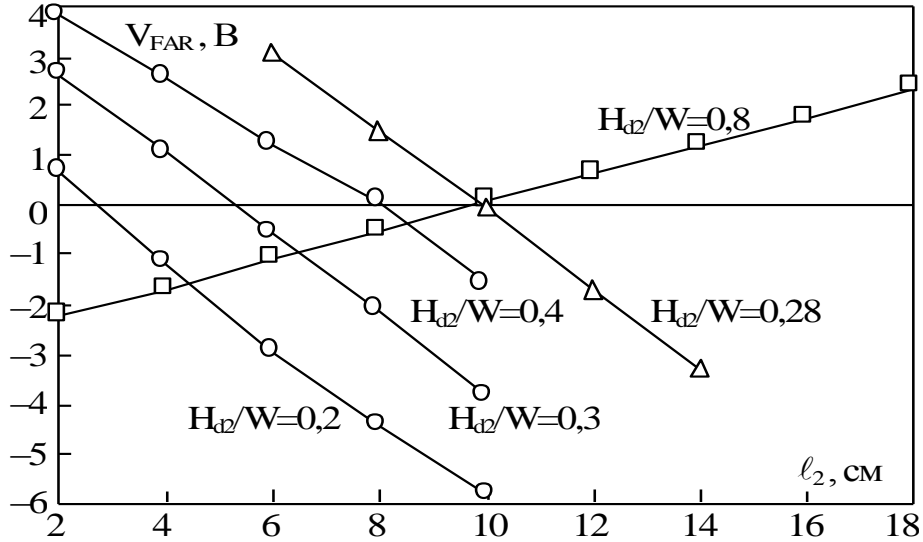


Рис. 5.24. Зависимости V_{FAR} от l_2

Компенсация дальней перекрёстной помехи возможна и в межсоединении печатной платы с двухслойным диэлектриком из трёх отрезков (рис. 5.25). Для этой структуры вычислены формы дальней перекрёстной помехи для $H_{d2}/W=0,28$ при $l_1=l_3=5$ см и $l_2=6, 8, 10, 12, 14$ см. Они показаны в табл. 5.4, из которой видна значительная зависимость величины и полярности дальней перекрёстной помехи от длины среднего отрезка. Для наглядности сводная зависимость соответствующих пиковых значений дальней перекрёстной помехи от l_2 показана на рис. 5.24 (треугольниками).

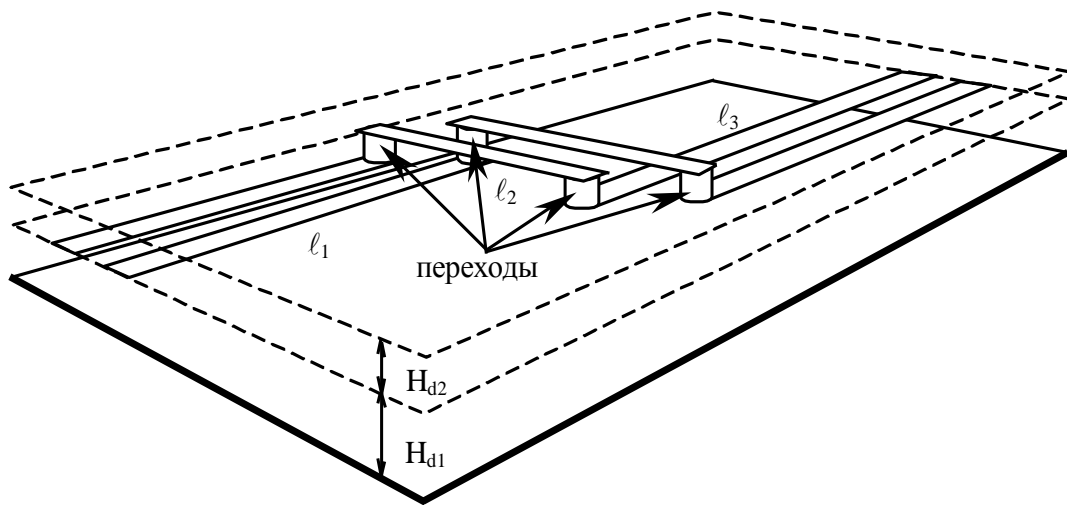
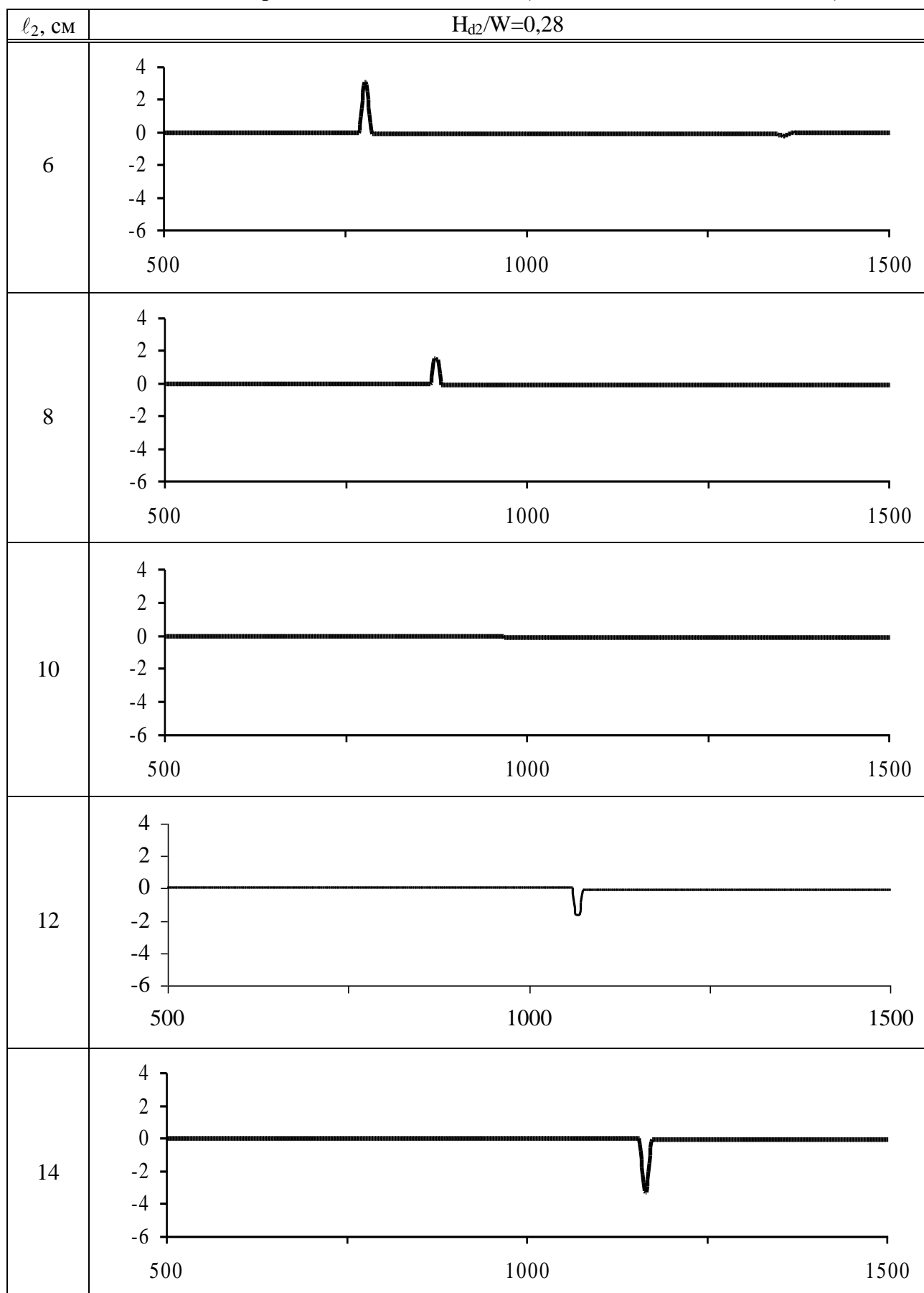


Рис. 5.25. Три последовательно соединённых отрезка связанных микрополосковых линий: обращённых (l_1), подвешенных (l_2), обращённых (l_3)

Формы (В, пс) дальней перекрёстной помехи для трёх последовательно соединённых отрезков связанных линий ($l_1=l_3=5$ см, $V_{in0}=10$ В, $t_r=10$ пс)



Связанные микрополосковые линии с покрывающим диэлектрическим слоем

Компенсация дальней перекрёстной помехи в широко применяемых обычных связанных МПЛ невозможна, поскольку для любых параметров этих линий ёмкостная связь всегда меньше индуктивной. Однако простое добавление покрывающего диэлектрического слоя поверх обычных МПЛ преобразует их в линии, подобные обращённым. Следовательно, новые свойства, отсутствующие в обычных микрополосковых линиях (в частности, возможность компенсации дальней перекрёстной помехи), могут появиться в покрытых МПЛ и использоваться в одиночном или последовательно соединённых отрезках таких связанных линий (рис. 5.26).

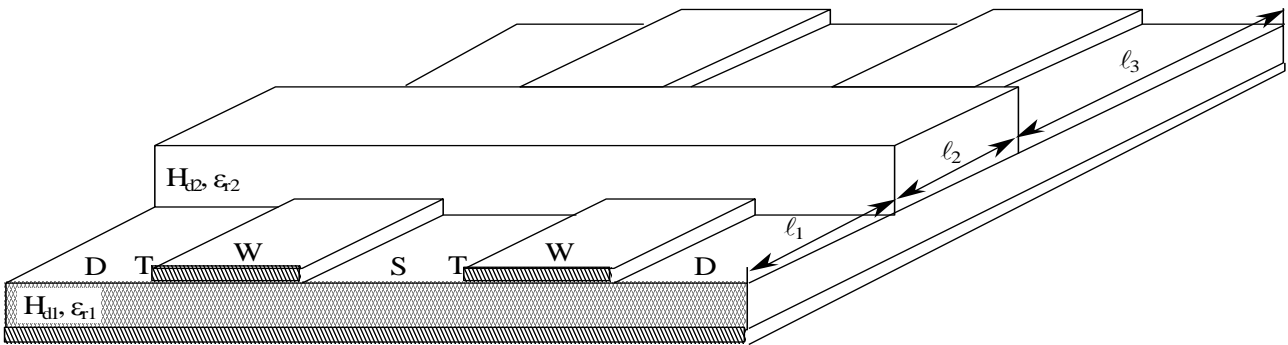


Рис. 5.26. Структура с линиями с покрывающим диэлектрическим слоем

Для проверки этого предположения вычислены параметры линий и смоделированы формы сигналов аналогично предыдущим разделам. Исходные параметры линий: $T/W=0,1$; $D/W=3$; $S/W=1$; $H_{d1}/W=0,5$; $\epsilon_{r1}=3$. Вычисленные зависимости (K_C-K_L) от H_{d2}/W для $\epsilon_{r2}=1;2;3;4;5$ показаны на рис. 5.27, из которого видна возможность (K_C-K_L) быть равной нулю или больше нуля при $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$.

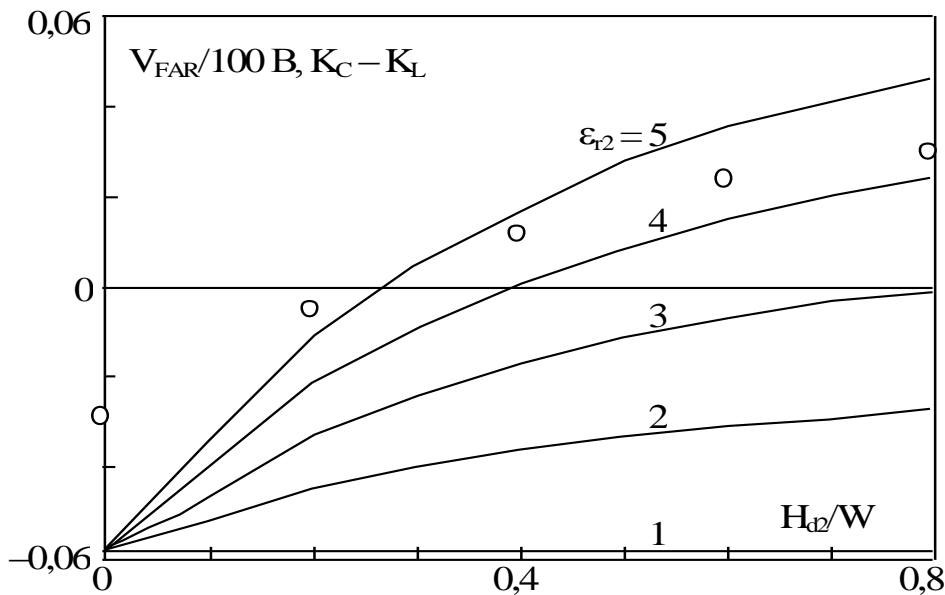


Рис. 5.27. Зависимость (K_C-K_L) двух связанных микрополосковых линий с покрывающим диэлектрическим слоем от H_{d2}/W для $\epsilon_{r2}=1 \dots 5$ (сплошные линии). Пять значений ($V_{FAR}/100 В$) для рис. 5.26 (окружности)

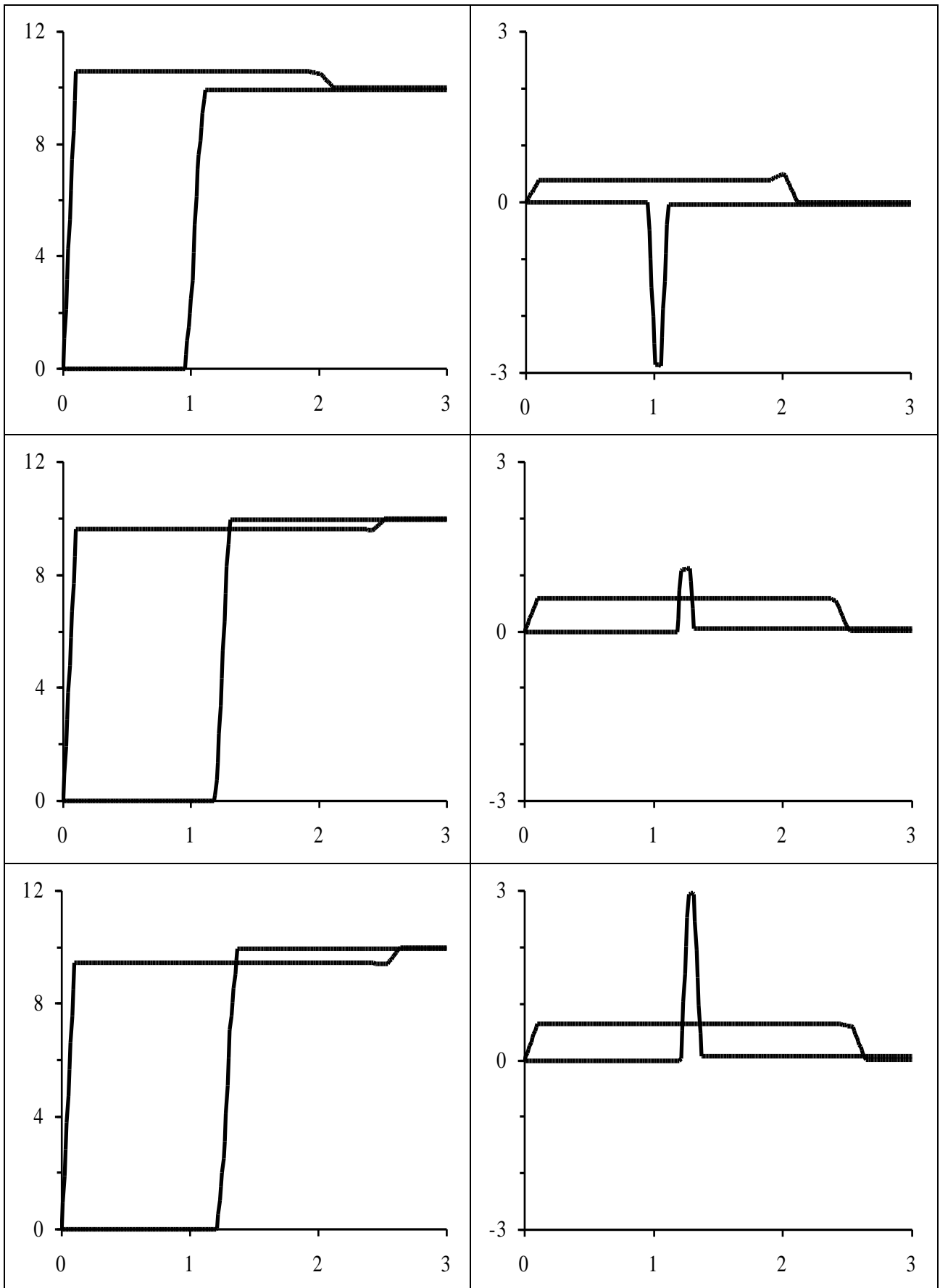
Несмотря на простоту исследуемой конфигурации, моделирование формы дальней перекрёстной помехи при различных параметрах покрывающего диэлектрического слоя требует вычислений по моделям различной сложности. Так, для исследования зависимости формы сигнала от толщины покрывающего диэлектрического слоя можно обойтись вычислением отклика одного отрезка связанных линий. Однако, для исследования зависимости формы сигнала от длины покрывающего диэлектрического слоя необходимо вычисление отклика двух отрезков связанных линий. Наконец, для исследования зависимости полной компенсации перекрёстной помехи от положения покрывающего диэлектрического слоя необходимо вычисление отклика трёх отрезков связанных линий. Ниже будет рассмотрен и пояснён каждый из этих трёх случаев, но, в отличие от предыдущих разделов, здесь будут показаны не только формы сигнала дальней, но и ближней перекрёстной помехи, а также формы сигналов в начале и конце активной линии. Это позволит более полное исследование данного способа, а именно, оценку влияния всех основных геометрических параметров покрывающего диэлектрического слоя на формы сигналов на всех четырёх концах исследуемой структуры.

Сначала дальняя перекрёстная помеха рассчитывалась для структуры из одного отрезка двух связанных микрополосковых линий с покрывающим диэлектрическим слоем ($l_1=l_3=0$, $l_2=20$ см). В начале активной линии полагался входной сигнал с линейно нарастающим фронтом $t_r=100$ пс до величины $V_{in0}=10$ В. Пять пиковых значений (делённых на 100 В) дальней перекрёстной помехи для $H_{d2}/W=0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ ($\epsilon_{r2}=5$; $H_{d1}/W=0,5$; $\epsilon_{r1}=3$; $D/W=3$; $S/W=1$, $T/W=0,1$) показаны на рис. 5.27 окружностями. Видно значительное изменение, в частности её полярности и величины, с высотой покрывающего диэлектрического слоя. Это значит, в частности, что при заданной величине ϵ_{r2} (когда $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$) соответствующим выбором значения H_{d2} можно минимизировать дальнюю перекрёстную помеху. Отметим, что точка возможной полной компенсации дальней перекрёстной помехи, указываемая окружностями, приблизительно соответствует точке, указываемой соответствующей сплошной линией (K_C-K_L) для $\epsilon_{r2}=5$, что подтверждает корректность оценки точки компенсации дальней перекрёстной помехи по вычислению параметров, без вычисления временного отклика. Три примера форм сигналов, вычисленных для $H_{d2}=0; 0,4; 0,8$, показаны в табл. 5.5.

Наконец, рассмотрено влияние положения покрывающего диэлектрического слоя на полную компенсацию дальней перекрёстной помехи. С этой целью найдена длина покрывающего диэлектрического слоя ($l_2=9,84$ см), соответствующая полной компенсации дальней перекрёстной помехи в предыдущей структуре. Затем увеличивалось положение l_1 этого покрывающего слоя от начала линий ($l_1=0 \dots 10$ см), тогда как общая длина трёхотрезковой структуры сохранялась постоянной ($l_1+l_2+l_3=20$ см). Таким образом, покрывающий диэлектрический слой длиной, соответствующей полной компенсации дальней перекрёстной помехи, как бы передвигается от начала к концу связанной МПЛ дли-

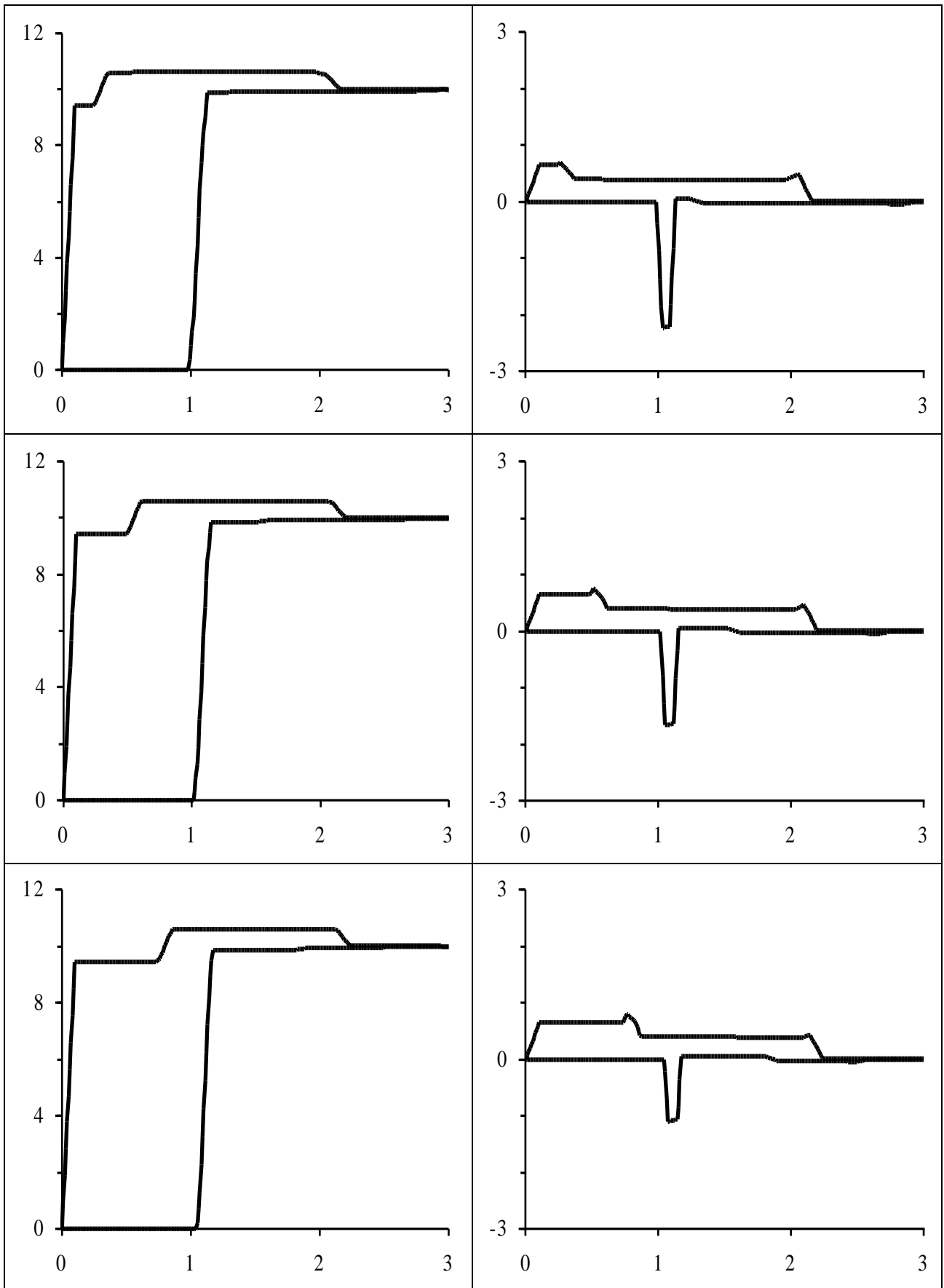
ной 20 см. Вычисленные формы сигналов, соответствующие этому случаю показаны в табл. 5.9.

Формы сигналов на ближнем и дальнем концах активной (слева) и пассивной (справа) линий (В, нс) для $H_{d2}/W=0;0,4;0,8$ (сверху вниз)



Для более детального исследования возможности уменьшения дальней перекрёстной помехи рассмотрена её зависимость от длины покрывающего диэлектрического слоя. С этой целью проанализирована двухотрезковая структура ($\ell_1=0$), состоящая из отрезка связанных МПЛ с покрывающим диэлектрическим слоем и отрезка связанных МПЛ без этого слоя. Параметры отрезка с покрывающим слоем соответствуют $H_{d2}/W=0,8$; $\epsilon_{r2}=5$; $H_{d1}/W=0,5$; $\epsilon_{r1}=3$; $D/W=3$; $S/W=1$, $T/W=0,1$. Формы сигналов, вычисленные для возрастающей длины покрывающего диэлектрического слоя ($\ell_2=2,4,\dots,18$ см) при неизменной общей длине двухотрезковой структуры ($\ell_2+\ell_3=20$ см) показаны в табл. 5.6–5.8. Для наглядности сводная зависимость пикового значения дальней перекрёстной помехи от ℓ_2 показана на соответствующем графике рис. 5.24 (квадратами). Видно, что величина дальней перекрёстной помехи в этом случае также может быть уменьшена аналогично предыдущему случаю. Но это достигается посредством компенсации отрицательной дальней перекрёстной помехи МПЛ положительной дальней перекрёстной помехой МПЛ с покрывающим диэлектрическим слоем. Таким образом, в случае очень толстого покрывающего слоя его длина не должна быть очень большой для полной компенсации дальней перекрёстной помехи.

Формы сигналов на ближнем и дальнем концах активной (слева) и пассивной (справа) линий (В, нс) для $l_2=2,4,6$ см (сверху вниз), $l_1=0, l_2+l_3=20$ см



Формы сигналов на ближнем и дальнем концах активной (слева) и пассивной (справа) линий (В, нс) для $l_2=8,10,12$ см (сверху вниз), $l_1=0, l_2+l_3=20$ см

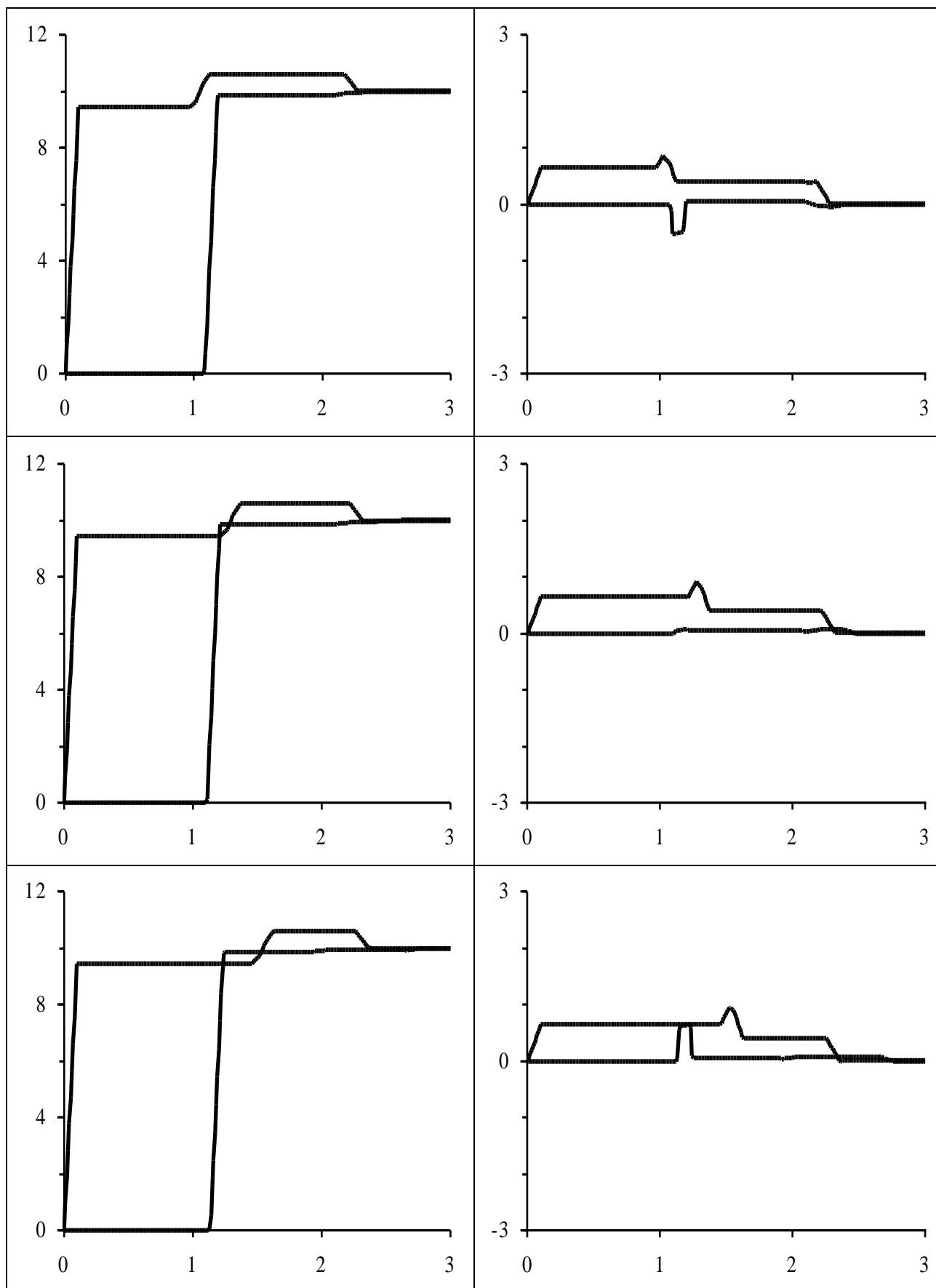
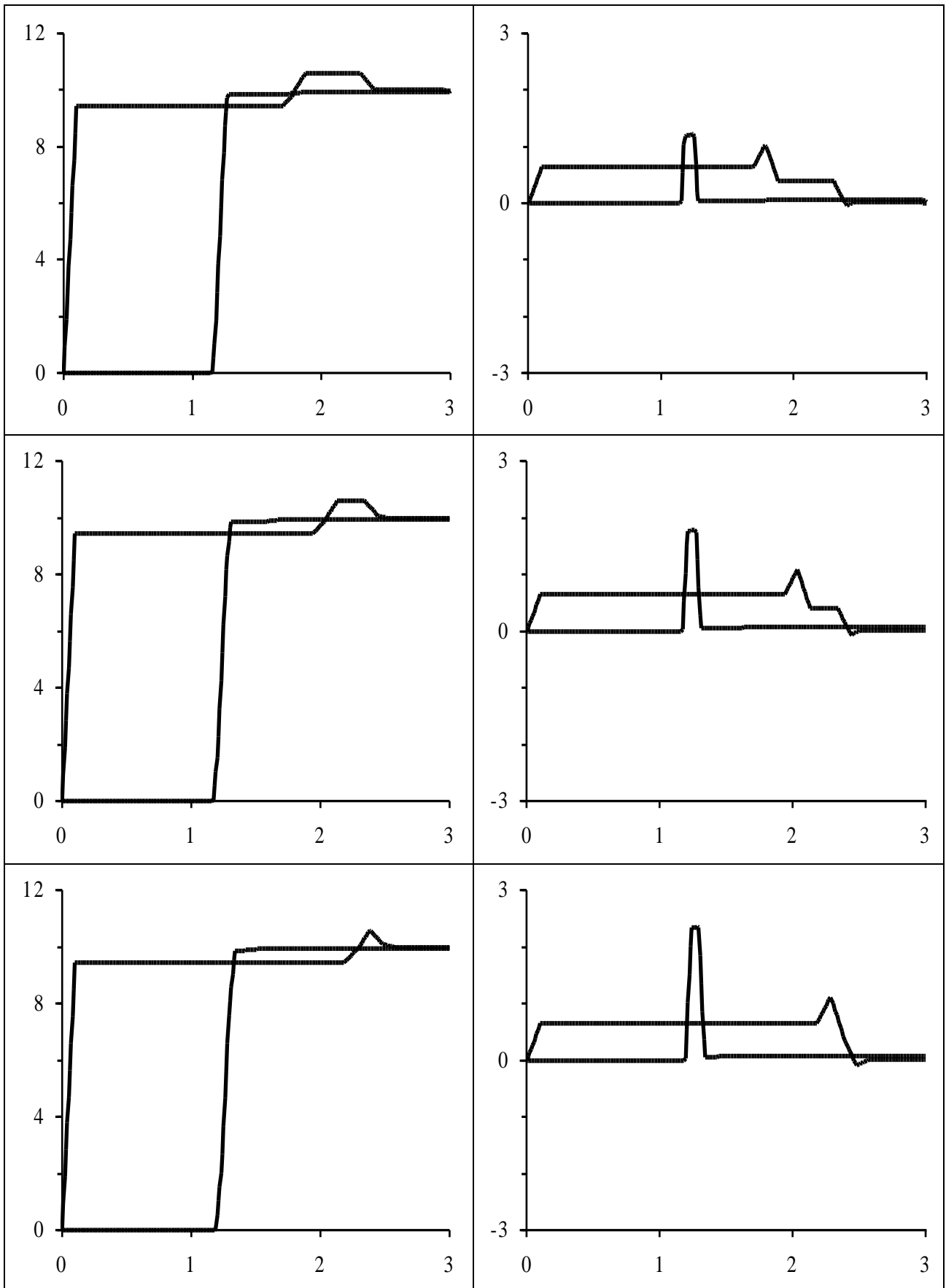
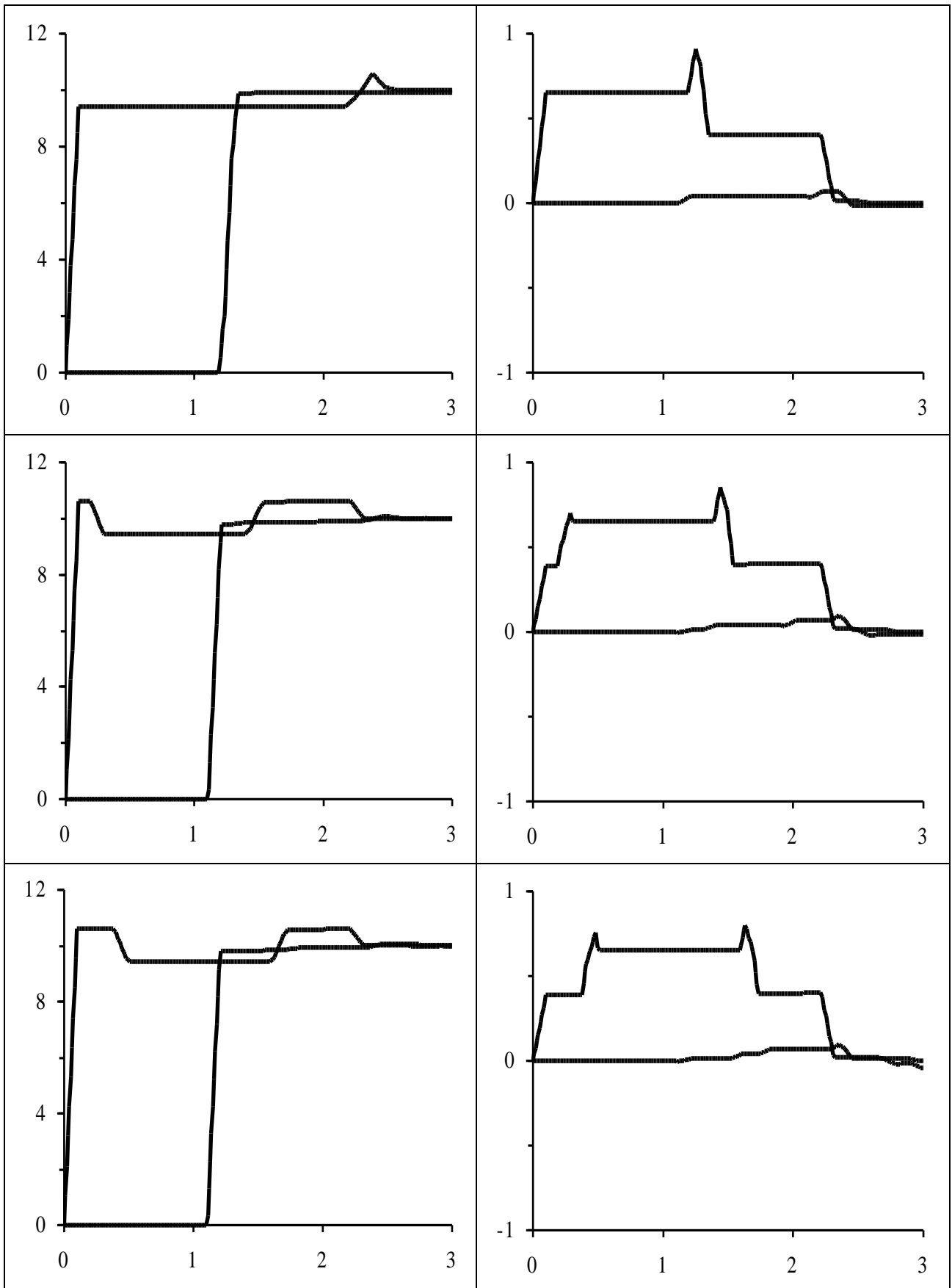


Таблица 5.8

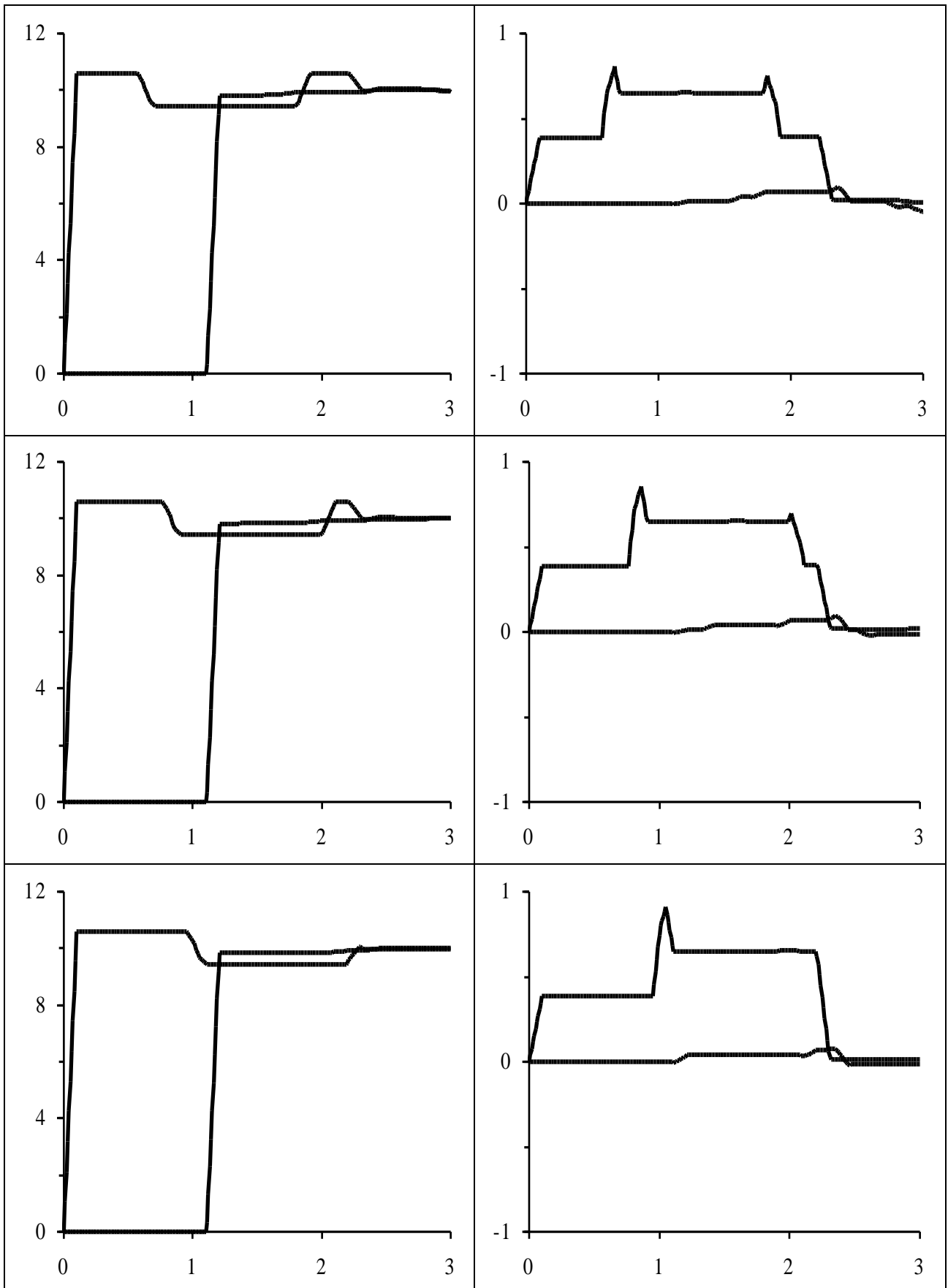
Формы сигналов на ближнем и дальнем концах активной (левый столбец) и пассивной (правый столбец) линий (В, нс) для $l_2=14,16,18$ см (сверху вниз), $l_1=0, l_2+l_3=20$ см



Формы сигналов на ближнем и дальнем концах активной (слева) и пассивной (справа) линий (В, нс) для $l_1=0,2,4$ см (сверху вниз), $l_2=9,84$ см, $l_2+l_3=20$ см



Формы сигналов на ближнем и дальнем концах активной (слева) и пассивной (справа) линий (В, нс) для $l_1=6,8,10$ см (сверху вниз), $l_2=9,84$ см, $l_2+l_3=20$ см



Графики, прежде всего, ещё раз показывают, что явление полной компенсации дальней перекрёстной помехи может иметь место и в трёх последовательно соединённых отрезках линий. Ясно видно, что изменение положения покрывающего диэлектрического слоя практически не влияет на полную компенсацию дальней перекрёстной помехи. Можно отметить и то, что форма сигнала в конце активной линии также практически не изменяется. Что касается ближней перекрёстной помехи, то изменение её формы очень интересно: она как бы сканирует по длине всю линию. Это явление также может быть использовано, например, для совершенствования датчиков различного назначения.

Таким образом, исследовано влияние всех основных параметров покрывающего диэлектрического слоя (относительной диэлектрической проницаемости, высоты, длины и положения) на дальнюю перекрёстную помеху и показана возможность использования этого покрывающего диэлектрического слоя в качестве простого и дешевого способа для уменьшения дальней перекрёстной помехи в связанных МПЛ.

5.3.4 Уменьшение дальних перекрёстных помех в отрезке многопроводной линии

Обычно рассматриваются только две связанные линии, поскольку влияние первой линии на вторую полагают преобладающим, а на остальные – пренебрежимо малым, например, когда линии расположены планарно и ближе к общей плоскости, чем друг к другу. Между тем, для многопроводных линий с двухслойным диэлектриком такое допущение может оказаться некорректным, например, в случаях полной или частичной компенсации дальней перекрёстной помехи на второй линии. В данном разделе исследована дальняя перекрёстная помеха на разных проводниках многопроводной линии передачи в зависимости от её параметров [237].

Объектом исследования выбрана обычная МПЛ, поскольку она является одной из самых распространённых полосковых линий, и в ней возможна компенсация дальней перекрёстной помехи покрывающим диэлектрическим слоем. С помощью метода моментов вычислены матрицы погонных коэффициентов электростатической [C] и электромагнитной [L] индукции четырёх связанных МПЛ с покрывающим диэлектрическим слоем (рис. 5.28). Толщина T и ширина W линий, расстояние между линиями S , расстояние от линий до края структуры D и толщина подложки H_{d1} таковы, что $T/W=0,01$; $D/W=1$; $S/W=1$; $H_{d1}/W=0,5$. Относительная диэлектрическая проницаемость подложки $\epsilon_{r1}=3$, покрывающего слоя $\epsilon_{r2}=5$, а его относительная толщина $H_{d2}/W=0;0,1\dots2$.

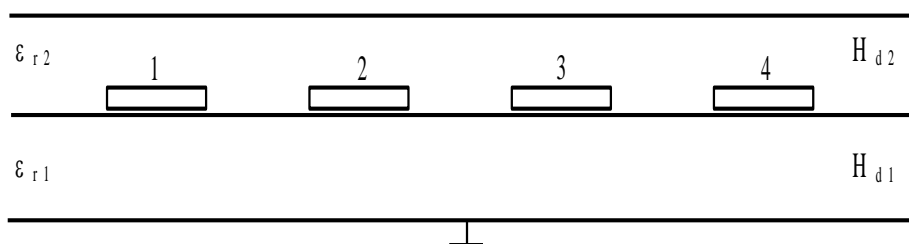
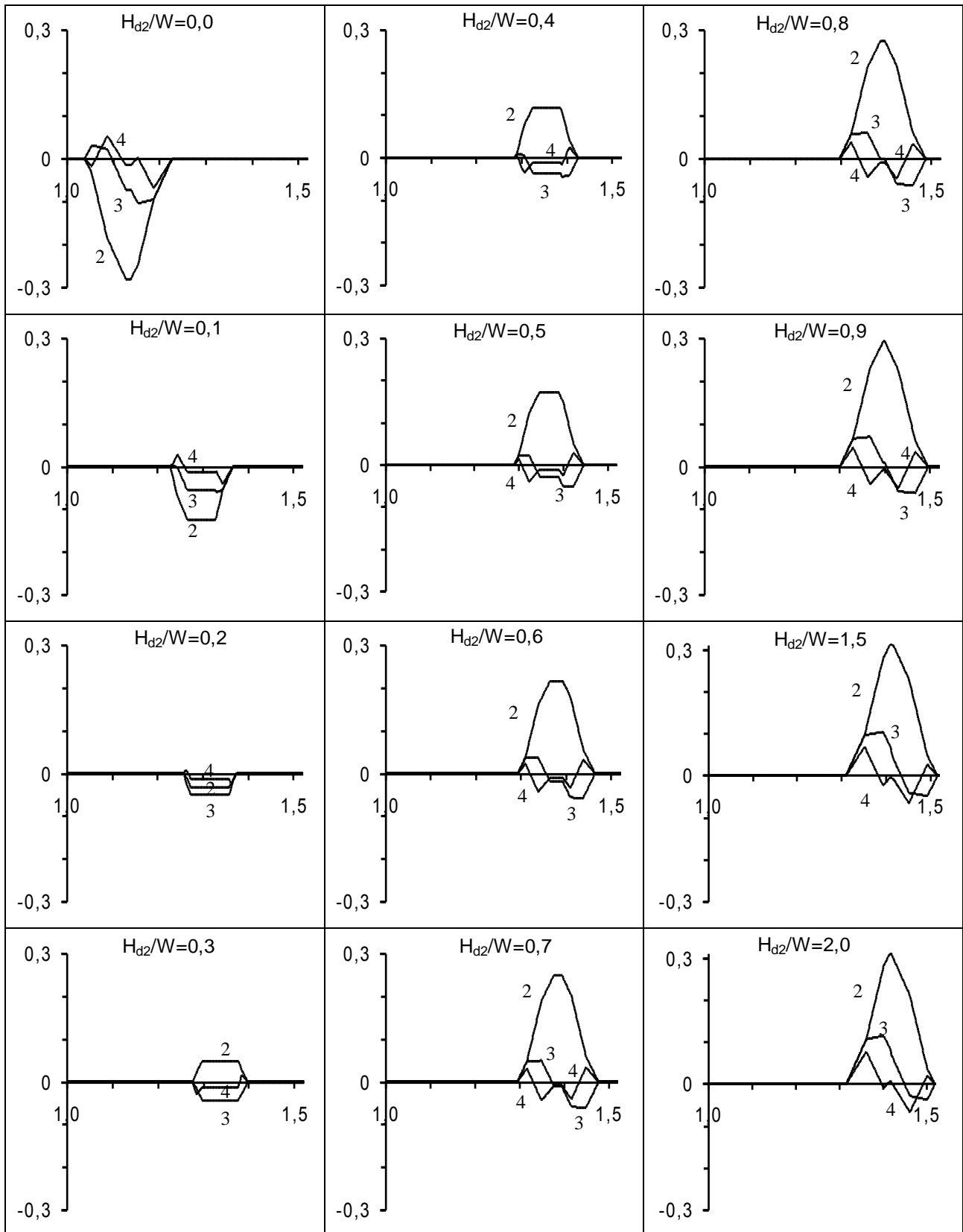


Рис. 5.28. Поперечное сечение исследуемой структуры

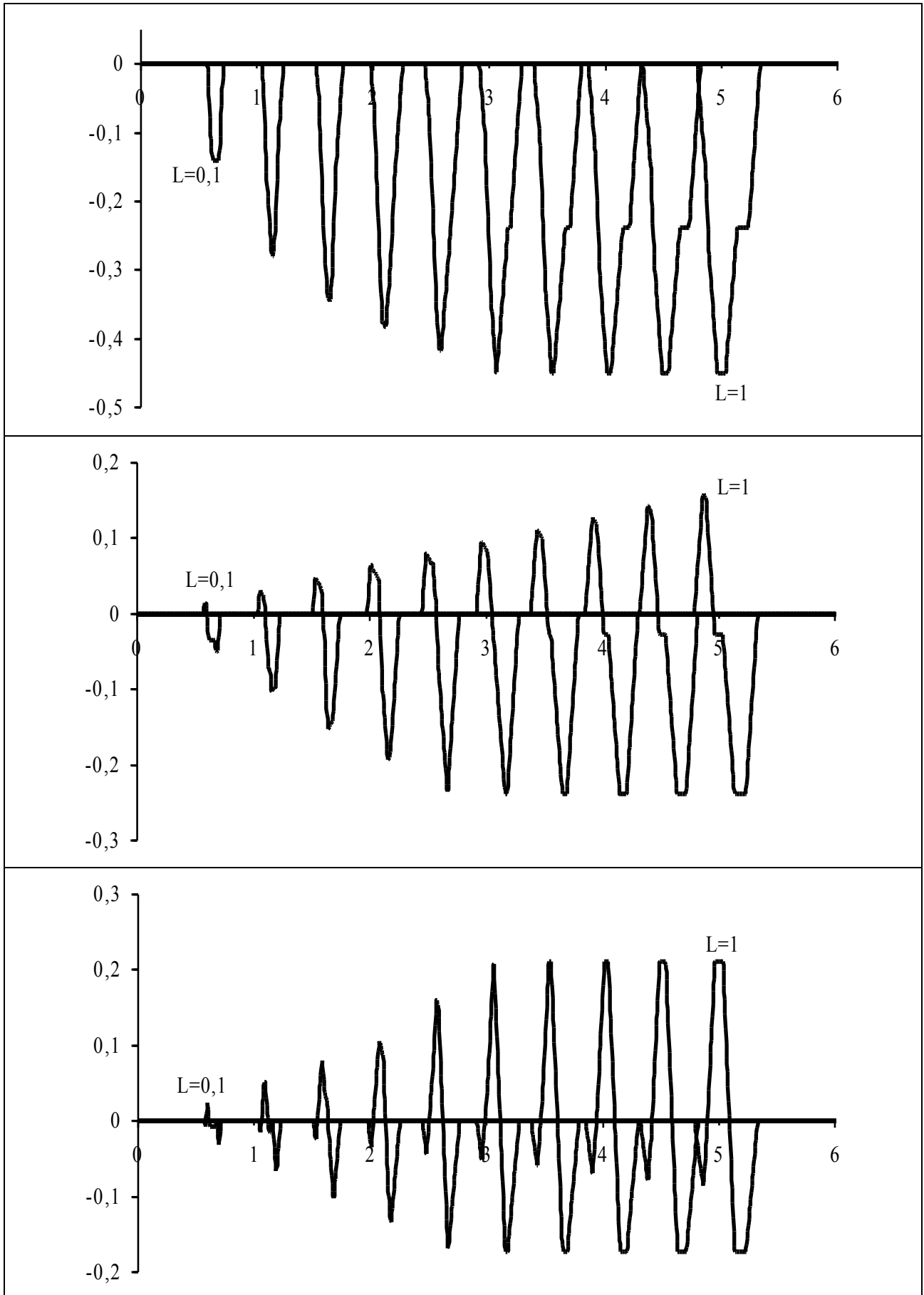
Для моделирования формы дальних перекрёстных помех использовались простые аналитические формулы, полученные в [238] для линий без потерь и дисперсии, с нулевыми нагрузками в начале и согласованных на конце. К началу первой линии подключен генератор ЭДС, линейно нарастающей за 0,1 нс до постоянного уровня 1 В. В табл. 5.11 приведены результаты моделирования формы напряжения дальней перекрёстной помехи на линиях 2, 3, 4 (цифры на графиках) при их длине $L=20$ см для различных значений H_{d2}/W (сверху вниз по мере возрастания).

Таблица 5.11

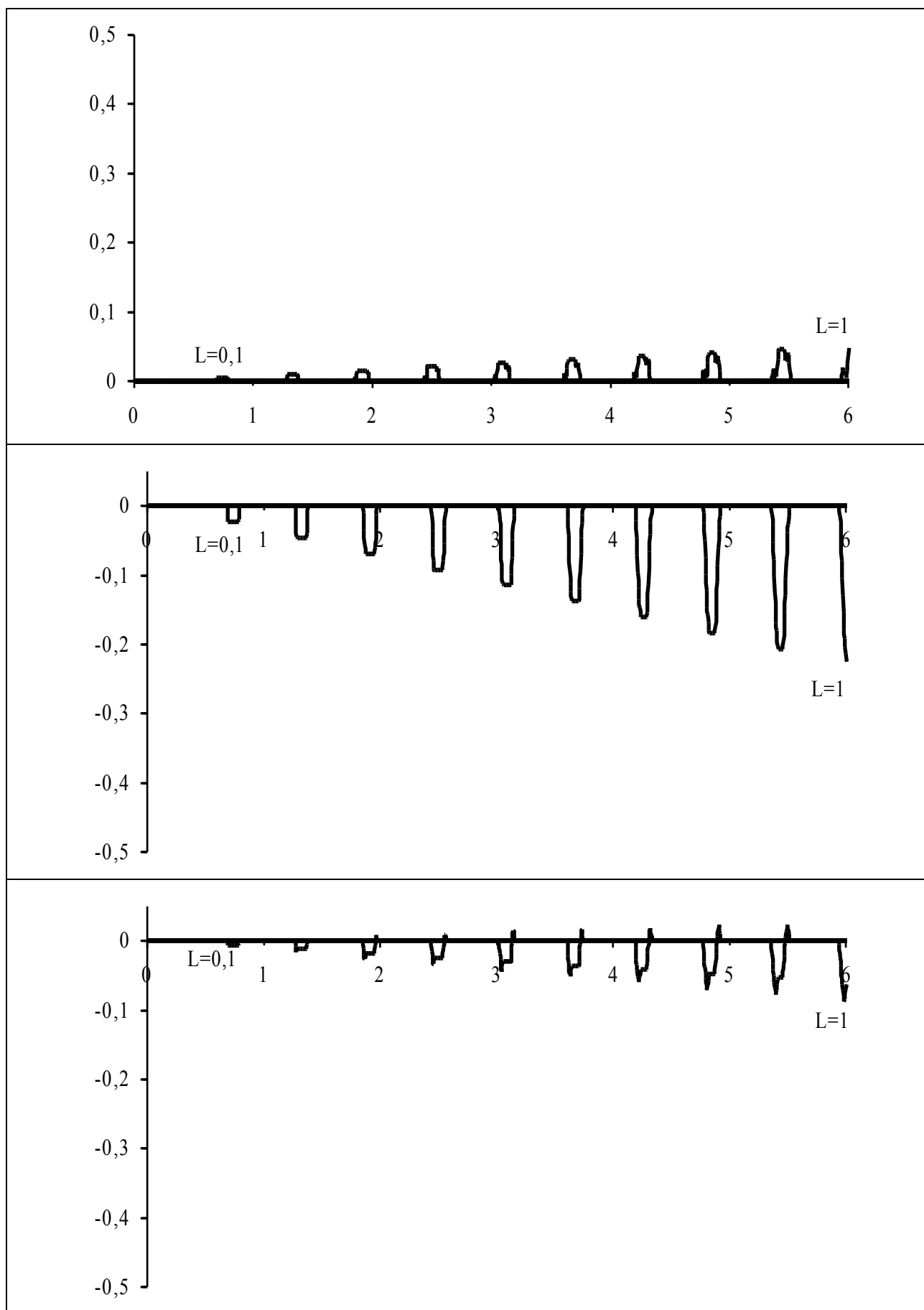
Форма дальней перекрёстной помехи (В, нс) на линиях 2, 3, 4 (цифры на графиках) для различных значений H_{d2}/W (сверху вниз по мере возрастания)



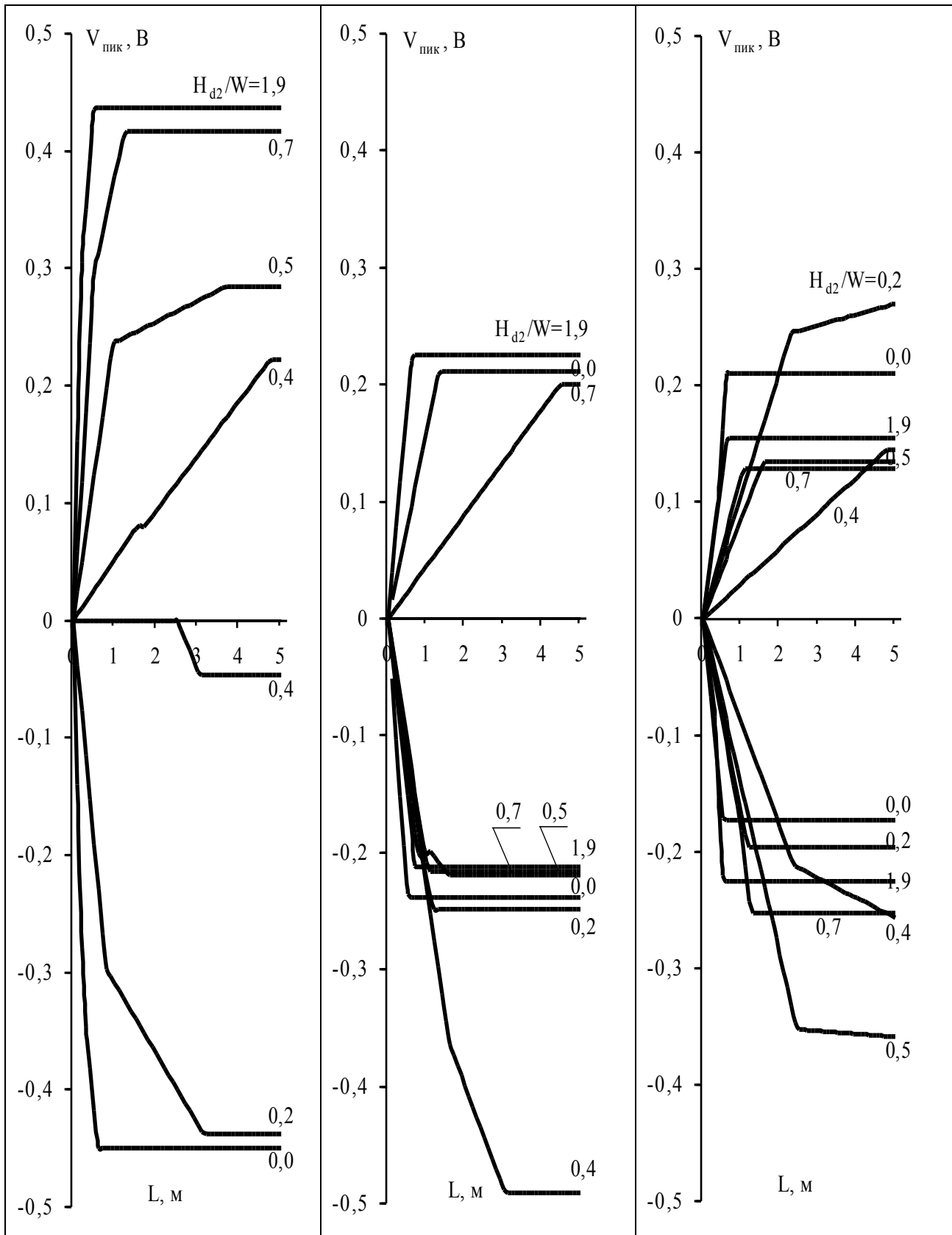
Формы дальней перекрёстной помехи (В, нс) на линиях 2, 3, 4 (сверху свниз) для различных длин $L=0,1;0,2...1$ м (на одном графике) при $H_{d2}/W=0$



Формы дальней перекрёстной помехи (В, нс) на линиях 2, 3, 4 (сверху свниз) для различных длин $L=0,1;0,2\dots 1$ м (на одном графике) при $H_{d2}/W=0,4$



Зависимости пиковых значений (положительных и отрицательных) дальних перекрёстных помех на линиях 2, 3, 4 (слева направо) от длины линий для $H_{d2}/W=0;0,2;0,4;0,5;0,7;1,9$



Качественный анализ формы дальней перекрёстной помехи на конкретной линии сделать довольно сложно, поскольку она является суперпозицией четырёх мод, каждая из которых распространяется со своей скоростью. Однако из результатов моделирования можно сделать следующие выводы:

пиковые значения дальней перекрёстной помехи на линиях 3 и 4 могут быть одного порядка и могут быть больше, чем на линии 2 (в случае компенсации дальней перекрёстной помехи на линии 2);

структура дальней перекрёстной помехи на линии 3 определяется, большей частью, влиянием от линии 1, проявляющемся в виде однополярного импульса, и влиянием импульса перекрёстной помехи в линии 2, проявляющемся в виде двухполярного импульса, причём вклад каждого из этих влияний может быть как преобладающим, так и нулевым;

полная компенсация (или небольшая перекомпенсация) дальней перекрёстной помехи на линии 2 минимизирует дальнюю перекрёстную помеху на линиях 3 и 4.

Поскольку реальная длина линий может изменяться в довольно широком диапазоне, полезно исследовать зависимость дальних перекрёстных помех от длины линии. В табл. 5.12 и 5.13 приведены выборки (для $H_{d2}/W=0,0$ и $H_{d2}/W=0,4$, соответственно) результатов моделирования формы дальней перекрёстной помехи (V , нс) на линиях 2, 3, 4 для различных длин $L=0,1;0,2\dots 1$ м (на одном графике). В табл. 5.14 приведены зависимости пиковых значений (положительных и отрицательных) дальних перекрёстных помех на линиях 2, 3, 4 от длины линии $L=0,1;0,2\dots 5$ м, при различных значениях $H_{d2}/W=0,0;0,2;0,4;0,5;0,7;1,9$. Из анализа табл. 5.14 можно сделать следующие выводы:

при увеличении длины линии пиковые значения дальней перекрёстной помехи на линиях 2, 3 и 4 увеличиваются до максимально возможных значений (и дальше не растут), причём эти значения одного порядка и достигают 50 % от уровня сигнала в линии 1;

при приближении к точке компенсации дальней перекрёстной помехи на линии 2 уменьшается максимально возможное пиковое значение дальней перекрёстной помехи на этой линии;

максимально возможное пиковое значение дальней перекрёстной помехи на линии 3 может быть больше, чем на линии 2.

В заключение, подчеркнём ещё раз, что представленные результаты получены в предположении линий с нулевыми нагрузками в начале и согласованных на конце. Таким образом, при моделировании учитывается вклад только падающих волн каждой из мод в линиях, что довольно сложно точно проверить экспериментально, поскольку рассогласование мод приведёт к их отражениям той или иной полярности, что может сильно изменить форму и величину дальних перекрёстных помех на разных линиях. Тем не менее, важно, что полученные значения получаются уже только за счёт разности скоростей различных мод и их амплитуд, тогда как наличие отражений может привести к значительному росту значений.

5.3.5 Основные результаты раздела

Идея компенсации дальней перекрёстной помехи очень проста. Суть её состоит в способности разности ёмкостной и индуктивной связей между проводниками линии становиться отрицательной, нулевой или положительной (из-за неоднородного диэлектрического заполнения) в зависимости от геометрических и электрических параметров проводников и диэлектриков линии. В результате, изменение какого-либо параметра этой линии около точки нулевой разности даст соответствующее поведение рассматриваемой характеристики линии. Здесь этой характеристикой является дальняя перекрёстная помеха в нескольких типах одно- и многоотрезковых межсоединений в двухслойной диэлектрической среде, рассмотренная в зависимости только от нескольких параметров этих межсоединений. Однако аналогичные интересные эффекты могут быть обнаружены в поведении: других характеристик; других похожих типов линий или структур межсоединений, состоящих из комбинаций таких линий; в зависимости от других параметров – не рассмотренных в этой работе. Полное исследование всех возможных вариантов довольно обширно, но автор надеется, что представленные примеры исследований, имеющих разную степень завершенности, помогут любому заинтересованному найти идеи должного использования описанных явлений в конкретных приложениях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии рассмотрена проблема уменьшения искажений электрических сигналов в межсоединениях. Автор надеется, что его работа окажется полезной для читателя.

Так, общий обзор проблемы и составляющих её задач, с многочисленными ссылками на работы известных исследователей, может стать хорошим стартом для новых исследований этих задач. В частности, он таким и стал для самого автора, его аспирантов и дипломников.

Три модели для вычисления матриц параметров двумерных и трёхмерных проводников и диэлектриков, детально представленные с единых позиций позволяют легко разобраться в сути вычисления и развивать его для более сложных конфигураций. Программная реализация этих моделей позволяет анализ реальных конфигураций практически произвольной сложности. Она выполнена в единой системе компьютерного моделирования и уже используется.

Аналитические модели для вычисления временного отклика кажутся громоздкими. Однако они уже получены, довольно легко программно реализованы и показали свою эффективность при вычислении отклика в заданном диапазоне времени с уникально малыми затратами памяти и приемлемыми затратами времени компьютера.

Все возможности помехозащищённой теплопроводной монтажной платы, в силу её новизны, ещё не исследованы полностью. Но предварительные оценки, представленные в работе, позволяют ожидать от неё высоких характеристик при малых затратах.

Исследованные возможности уменьшения искажений за счёт соответствующего выбора параметров межсоединений, в частности параметров диэлектриков, могут оказаться весьма полезными, когда возможности изменения других параметров уже исчерпаны. В работе эти возможности показаны для ряда различных параметров и линий, но он не исчерпан полностью.

Результаты, представленные в данной монографии, широко апробированы: опубликованы в материалах различных конференций и симпозиумов, большей частью зарубежных, и докладывались на них; использовались при выполнении различных научно-исследовательских работ; несколько лет используются автором в учебном процессе ТУСУР в дисциплинах "Основы автоматизированного проектирования" и "Основы электромагнитной совместимости". Однако автору хотелось бы более широкого использования результатов его исследований отечественными специалистами, чтобы отечественная радиоэлектронная аппаратура стала более высокопроизводительной, помехоустойчивой и компактной. И хочется надеяться, что эта книга послужит достижению этой цели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Z.Cendes. Simulating the behavior of high-speed circuits. *Computer Design*. Vol. 34. P. 130–131. No. 8. August 1995.
2. R.Weiss. 64-Gbit DRAMs. 1-GHz microprocessors expected by 2010. *Computer Design*. Vol. 34. P. 50–52. No. 5. May 1995.
3. N.I.Bazhenkov and T.R.Gazizov. EMC improvement of a double-sided printed circuit board. *Proc. of the 11-th Int. Wroclaw Symp. on EMC*. September 2–4. 1992. P. 381–384.
4. W.John. EMC of Printed Circuit Boards and Microelectronic Engineering Techniques. *Proc. of the 13-th Int. Wroclaw Symp. on EMC*. June 25–28. 1996. P. 14–52.
5. W.W.M. Dai. Special Issue on Simulation, modeling and electrical design of high-speed and high-density interconnects. *IEEE Trans. Circuits Syst.-I*. Vol. 39. Nov. 1992.
6. M.Nakhla and Q.J.Zhang. Special Issue on High-speed Interconnects. *International Journal on Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. Vol. 5. Jan. 1994.
7. V.K.Tripathi and R.Sturgivant. Special Issue on Interconnects and Packaging. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*. Vol. 45. Oct. 1997.
8. F.G.Canavero. Special issue on recent advances in EMC of printed circuit boards. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*. Vol. 43. No. 4. Nov. 2001.
9. Коваленков В.И. Теория передачи по линиям связи.—М.: Связьиздат. 1937. Т.1,2.
10. Коваленков В.И. Устанавливающиеся электромагнитные процессы вдоль проводных линий.—М.: Издательство Академии наук СССР. 1945.
11. Кузнецов П.И. Стратонович Р.Л. Распространение электромагнитных волн в многопроводных системах: Сб. статей.—М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1958.— 84 с.
12. P.I.Kuznetsov and R.L.Stratonovich. *The Propagation of Electromagnetic Waves in Multiconductor Transmission Lines*. New York: Macmillan. 1964; reprinted by Pergamon Press. 1984.
13. Канторович Л.В., Крылов В.М. Приближенные методы высшего анализа.—М.—Л.: Физматгиз. 1962.
14. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.—М.: Физматгиз. 1959.
15. R.F.Harrington. Origin and Development of the Method of Moments for Field Computation. *IEEE Antennas and Propagation Society Magazine*. P. 31–36. June 1990.
16. R.F.Harrington. Matrix Methods for Field Problems. *IEEE Proc*. 1967. 2. p.136–149.
17. R.F.Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. New York. The MacMillan Co. 1968; reprinted by Krieger Publishing Co. Malabar. Fl. 1982.
18. Захар-Иткин М.Х. Теорема взаимности и матричные телеграфные уравнения для многопроводных линий передачи.— *Радиотехника и электроника*. 1974. №11. с. 2338–2348.
19. Гипсман А.И., Красноперкин В.М., Силин Р.А. Расчёт многополосковых линий и устройств.— *Антенны/Под ред. А.А.Пистолькорса*.—М.: Радио и связь. 1986. Вып. 34.— с. 52–68.
20. Кравченко С.И., Бахарев С.И. Расчёт матрицы рассеяния многопроводных полосковых линий и устройств на их основе.— *Вопросы радиоэлектроники. Сер.—Общетеchnическая*. 1978. Вып. 8. с.45–53.
21. Малютин Н.Д. Многосвязные полосковые структуры и устройства на их основе.— Томск: Изд-во Том. ун-та. 1990. —164 с.
22. Сычёв А.Н. Управляемые СВЧ устройства на многомодовых полосковых структурах.— Томск: Томский гос. ун-т.- 2001.- 318с.
23. Гвоздев В.И. Нефедов Е.И. Объёмные интегральные схемы СВЧ.— М.: Наука. 1985.— 256 с.
24. Чуринов Ю.А. Переходные процессы в линиях связи быстродействующих ЭВМ.— М.: Советское радио. 1975.— 207 с.
25. Иванов Л.В. Перекрёстные наводки в системе двух линий. — *Вопросы радиоэлектроники. Сер.— Электронная вычислительная техника*. 1971. Вып. 5. с. 3-20.

26. Брук Б.И. Перекрёстные наводки в сигнальных цепях ЭЦВМ.— М: ИТМ и ВТ. 1973.— 59 с.
27. Вашакидзе Ю.Н. Машинный анализ межсоединений интегральных и гибридных схем сверхбыстродействующей логики с учётом их взаимного влияния.— Управляющие системы и машины. 1977. №6(32). с. 112–115.
28. Князев А.Д. Кечиев Л.Н. Петров Б.В. Конструирование радиоэлектронной и электронно-вычислительной аппаратуры с учётом электромагнитной совместимости. — М.: Радио и связь. 1989. — 224 с.
29. Чермошенцев. С.Ф. Информационные технологии электромагнитной совместимости электронных средств.—Казань: Изд-во Казан. гос. тех. ун-та. 2000. 152 с.
30. Н.В. Коровкин. Е.Е. Селина. Моделирование волновых процессов в распределенных электромагнитных системах. – С.-Пб.: СПбГТУ. 1992 – 110 с.
31. N.V. Korovkin. S.V. Kotchetov. E.E. Selina. M.Ianoz. Simulation of the frequency characteristics of transmission lines for transient calculations. Proc. 13th International Zurich Symp. Feb 16–18. 1999. P. 445–450.
32. Беднов В.Г. Пономарев Е.И. Симхес В.Я. Оценка амплитуды перекрёстных помех в межэлементных линиях связи ЭВМ.—Вопросы радиоэлектроники. Сер. Электронная Вычислительная Техника. 1978. Вып. 12. с.131–137.
33. V.L.Carey. T.R.Scott, and W.T.Weeks. Characterization of multiple parallel transmission lines using time domain reflectometry. IEEE Trans. Instrum. Meas. Vol. IM-18. No. 3. P. 166–171. Sept.1969.
34. A.K.Agrawal. H.M.Fowles and L.D.Scott. Experimental characterization of multiconductor transmission lines in inhomogeneous media using time-domain techniques. IEEE Trans. Electromag. Compat. Vol. EMC-21. No. 1. P. 28–32. Feb.1979.
35. A.K.Agrawal. K.M.Lee. L.D.Scott, and H.M.Fowles. Experimental characterization of multiconductor transmission lines in the frequency domain. IEEE Trans. Electromag. Compat. Vol. EMC-21. No. 1. P. 20–27. Feb.1979.
36. F.-Y.Chang. Computer-aided characterization of coupled TEM transmission lines. IEEE Trans. on Circuits and Systems. Vol. CAS-27. No. 12. P. 1194–1205. Dec. 1980.
37. Вычислительные методы в электродинамике /Под ред. Миттры.—М.: Мир. 1977.— 485 с.
38. M.R.Scheinfein. J.C.Liao. O.A.Palusinski, and J.L.Prince. Electrical performance of high-speed interconnect systems. IEEE Trans. Components. Hybrids. Manuf. Technol. Vol. CHMT-10. No. 3. P. 303–309. September 1987.
39. Ховратович В.С. Параметры многопроводных передающих линий.— Радиотехника и электроника. 1975. №3. с. 468–473.
40. Шлее В.Р. Аубакиров К.Я. Воронин М.Я. Численный метод анализа неоднородной многопроводной линии.—Радиотехника и электроника. 1983. т.28. №6. с. 1058–1063.
41. C.R.Paul. Useful matrix chain parameter identities for the analysis of multiconductor transmission lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-23. P. 756–760. Sept. 1975.
42. Иоссель Ю.Я. Кочанов Э.С. Струнский М.Г. Расчёт электрической ёмкости.—Л.: Энергоиздат. 1981.—288 с.
43. Калантаров П.Л. Цейтлин Л.А. Расчёт индуктивностей: Справочная книга.—Л.: Энергоатомиздат. 1986.—488 с.
44. Справочник по расчёту и конструированию СВЧ полосковых устройств / С.И.Бахарев. В.И.Вольман. Ю.Н.Либ и др.: Под ред. В.И.Вольмана.— М.: Радио и связь. 1982.—328 с.
45. G.Ghione. An efficient. CAD-oriented model for the characteristic parameters of multiconductor buses in high-speed digital GaAs ICs. International Journal on Analog Integrated Circuits and Signal Processing. Vol. 5. P. 67-75. Jan.1994.

46. D.Homentcovschi, G.Ghione, C.Naldi, and R.Oprea. Analytic determination of the capacitance matrix of planar or cylindrical multiconductor lines on multilayered substrates. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-43. P. 363–373. Feb.1995.
47. G.Ghione, I.Maio, and G.Vecchi. Modeling of multiconductor buses and analysis of crosstalk, propagation delay, and pulse distortion in high-speed GaAs logic circuits. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-37. P. 445–456. March 1989.
48. T.Kuo. Accurate quasi-TEM spectral domain analysis of single and multiple coupled microstrip lines of arbitrary metallization thickness. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-43. No. 8. P. 1881–1888. Aug.1995.
49. R.T.Kollipara and V.K.Tripathi. Quasi-TEM spectral-domain technique for multiconductor structures with trapezoidal conductor cross sections. *Microvawe and Optical Technologies Lett.* v.3. P. 4–6. Jan.1990.
50. G.Plaza, F.Mesa, and M.Horno. Quick computation of [C], [L], [G], and [R] Matrixes of multiconductor and multilayered transmission systems. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-43. P. 1623–1626. July 1995.
51. M.Horno, F.L.Mesa, F.Medina, and R.Marques. Quasi-TEM analysis of Multilayered. multiconductor coplanar structures with dielectric and magnetic anisotropy including substrate losses. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-38. P. 1059–1068. Aug.1990.
52. E.Yamashita. Variational Method for the analysis of Microstrip-like transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-16. P. 529–535. Aug.1968.
53. Y.Chang and I.C.Chang. Simple method for the variational analysis of a generalized N-dielectric-layer transmission line. *Electronics Letters.* v.6. No. 3. P. 49–50. Feb. 1970.
54. Y.Chang and C.-Y.Wu. Extention of Chang-Chang's method to analysis of a generalized multilayer and multiconductor transmission line system. *Electronics Letters.* v.7. No. 2. P. 45–47. Jan. 1971.
55. A.Sawicki and K.Sachse. Lower and upper bound calculations on the capacitance of multiconductor printed transmission line using the spectral-domain approach and variational method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-34. P. 236–244. Feb.1986.
56. E.Yamashita, M.Nakajima, and K.Atsuki. Analysis method for generalized suspended striplines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-34. P. 1457–1463. Dec.1986.
57. M.Horno. Quasistatic characteristics of microstrip on arbitrary anisotropic substrate. *Proc.IEEE.* 1980. 68. P. 1033–1034.
58. M.Horno. Upper and lower bounds on capacitance of coupled microstrip lines with anisotropic substrates. *IEE Proc.* Vol. 129. Pt.H. №3. P. 89–93. June 1982.
59. M.Horno, and R.Marques. Coupled microstrips on double anisotropic layers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-32. P. 467–470. Apr.1984.
60. F.Medina and M.Horno. Determination of Green's function matrix for multiconductor and anisotropic multidielectric planar transmission lines: a variational approach. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-33. P. 933–940. Oct.1985.
61. F.Medina and M.Horno. Capacitance and inductance matrices for multistrip structures in multilayered anisotropic dielectrics. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-35. P. 1002–1008. Nov.1987.
62. T.Kitazava. Variational method for multiconductor coupled striplines with stratified anisotropic media. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-37. P. 484–491. March 1989.
63. W.T.Weeks. Calculation of coefficients of capacitance of multiconductor transmission lines in the presence of a dielectric interface. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-18. P. 35–43. Jan.1970.
64. A.Farrar and A.T.Adams. Multilayer microstrip transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-22. P. 889–891. Oct.1974.

65. C.Wei. R.F.Harrington. J.R.Mautz, and T.K.Sarkar. Multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-32. P. 439–450. Apr.1984.
66. Y.L.Chow. J.J.Yang and G.E.Howard. Complex images for electrostatic field computation in multilayered media. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-39. P. 1120–1125. July 1991.
67. J.Venkataraman. S.M.Rao. A.R.Djordjevic. T.K.Sarkar, and Y.Naiheng. Analysis of Arbitrarily Oriented Microstrip Transmission Lines in Arbitrarily Shaped Dielectric Media over a Finite Ground Plane. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-33. P. 952–959. Oct.1985.
68. S.M.Rao. T.K.Sarkar, and R.F.Harrington. The electrostatic field of conducting bodies in multiple dielectric media. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-32. P. 1441–1448. Nov.1984.
69. W.Delbale and D.De Zutter. Space-domain Green's function approach to the capacitance calculation of multiconductor lines in multilayered dielectrics with improved surface charge modeling. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-37. P. 1562–1568. Oct.1989.
70. F.Olyslager. N.Fache, and D.De Zutter. New fast and accurate line parameter calculation of general multiconductor transmission lines in multilayered media. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-39. P. 901–909. June 1991.
71. H.Diestel. Analysis of planar multiconductor transmission-line systems with the method of lines. *AEU.* Vol. 41. 3. 1987. P. 169–175.
72. Вихорев А.Г. Шлепнёв Ю.О. Анализ многопроводных микрополосковых линий методом прямых.—*Радиотехника и электроника.* 1991. т. 364. №4. с.820–823.
73. F.J.Schmuckle and R.Pregla. The method of lines for the analysis of planar waveguides with finite metallisation thickness. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-39. P. 107–111. Jan.1991.
74. B.M.Sherrill and N.G.Alexopoulos. The method of lines applied to a finline/strip configuration on an anisotropic substrate. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-35. P. 568–575. 1987.
75. H.Diestel. A quasi-TEM analysis for curved and straight planar multiconductor systems. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. 37. P. 748–753. April 1989.
76. S.B.Worm and R.Pregla. Hybrid-mode analysis of arbitrarily shaped planar microwave structures by the method of lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-32. P. 191–196. Feb. 1984.
77. R.Pregla. General formulas for the method of lines in cylindrical coordinates. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-43. P. 1617–1620. July 1995.
78. Taylor. G.N.Elkhouri, and T.E.Wade. On the Parasitic Capacitances of Multilevel Parallel Metallization Lines. *IEEE Trans. Electron Devices.* Vol. ED-30. P. 2408–2414. Nov.1985.
79. K.Tripathi and R.J.Bucolo. A simple network analog approach for the quasi-static parameters of general lossy anisotropic layered structures. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-33. P. 1458–1464. 1985.
80. L.Khan. G.I.Costache. Finite element applied to modeling crosstalk problems on printed circuit boards. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility.* Vol. MTT-31. P. 5–15. Feb.1989.
81. Khebir. A.B.Kouki and R.Mitra. Higher order asymptotic boundary condition for the finite element modeling of two-dimensional transmission line structures. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-38. P. 1433–1438. Oct.1990.
82. W.Pan. G.Wang and B.K.Gilbert. Edge effect enforced boundary element analysis of multilayered transmission lines. *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications.* Vol. 39. No. 11. P. 955–963. Nov.1992.
83. Wang. G.Pan, and B.K.Gilbert. A hybrid wavelet expansion and boundary element analysis for multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-43. No. 3. P. 664–675. March.1995.

84. Кечиев Л.Н. Применение метода моментов и граничных элементов для расчёта электрофизических параметров линий связи в коммутационных платах.— В кн.: Электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств: Тез. докл. и сообщ. Всесоюзного науч.-техн. симп.—М. Радио и связь. 1986. с. 95–96.
85. Nabors and J.White. Fastcap: A multipole accelerated 3-D capacitance extraction program. IEEE Trans. Computer- Aided Design. Vol. 10. P. 1447–1459. Nov.1992.
86. Nabors and J.White. Multipole-accelerated capacitance extraction algorithms for 3-D structures with multiple dielectrics. IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications. Vol. 39. No. 11. P. 946–954. Nov.1992.
87. R.Mautz. R.F.Harrington, and C.G.Hsu. The inductance matrix of a multiconductor transmission line in a multiple magnetic media. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-36. P. 1293–1295. Aug.1988.
88. R.Djordjevic. T.K.Sarkar, and S.M.Rao. Analysis of finite conductivity cylindrical conductors excited by axially-independent TM electromagnetic field. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-33. P. 960–966. Oct.1985.
89. T.R.Arabi. A.T.Murphy. T.K.Sarkar. R.F.Harrington, and A.R.Djordjevic. On the modeling of conductor and substrate losses in multiconductor. multielectric transmission line systems. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-39. P. 1090–1097. July 1991.
90. R.F.Harrington and C.Wei. Losses on multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-32. P. 705–710. July 1984.
91. J.Aguilera. R.Marques, and M.Horno. Quasi-TEM surface impedance approaches for the analysis of MIC and MMIC transmission lines. including both conductor and substrate losses. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-43. No. 7. P. 1553–1558. July 1995.
92. R.B.Wu and J.C.Yang. Boundary integral equation formulation of skin effect problems in multiconductor transmission lines. IEEE Trans. Magn. Vol. MAG-25. P. 3013–3015. July 1989.
93. I.Tsai and C.H.Chen. Perturbed-TEM analysis of transmission lines with imperfect conductors. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-38. P. 754–759. June 1990.
94. A.Djordjevic. R.F.Harrington. T.Sarkar, and Bazdar. Matrix parameters for multiconductor transmission lines. Dedham. MA: Artech House. 1989.
95. M.R.Scheinfein and O.A.Palusinski. Methods of calculation of electrical parameters for electronic packaging applications. Trans. of SCS. Vol. 4. 3. P. 187–254. July 1987.
96. W.John. E.Griese. M.Vogt. R.Greve. Verification of calculated electrical parameters of transmission line structures on printed circuit boards. Proc. of 13-th International Wroclaw Symp. on Electromagnetic Compatibility. Wroclaw. Poland. June 25–28. 1996. P. 258–263
97. Э.Цунасима. Требования потребителей к качеству материалов для печатных плат. Дэнси гидзюцу. том 28. 1986. с.47–59
98. G.W.Pan. G.Wang and B.K.Gilbert. Edge effect enforced boundary element analysis of multilayered transmission lines. IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications. Vol. 39. No. 11. P. 955–963. Nov.1992
99. J.Venkataraman. S.M.Rao. A.R.Djordjevic. T.K.Sarkar, and Y.Naiheng. Analysis of Arbitrarily Oriented Microstrip Transmission Lines in Arbitrarily Shaped Dielectric Media over a Finite Ground Plane. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-33. P. 952–959. Oct.1985
100. G.Pan. X.Zhu. B.K.Gilbert. Analysis of transmission lines of finite thickness above a periodically perforated ground plane at oblique orientations. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-43. P. 383–393. Feb.1995
101. B.J.Rubin. The propagation characteristics of signal lines in a mesh-plane environment. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-32. P. 522–531. May 1984
102. Veluswami A. Nakhla M.S. Zhang Qi-J. The application of neural networks to EM-based simulation and optimization of interconnects in high-speed VLSI circuits. IEEE Trans. on Microwave Theory Tech. Vol. 45. P.712–722. May 1997.

103. Т.Р.Газизов. Совершенствование межсоединений монтажных плат: Дис. ... канд. тех. наук. —Томск: ТУСУР. 1998. —153 с.
104. R.Harrington. Origin and Development of the Method of Moments for Field Computation. IEEE Antennas and Propagation Society Magazine. P. 31–36. June 1990
105. S.M.Rao. T.K.Sarkar, and R.F.Harrington. The electrostatic field of conducting bodies in multiple dielectric media. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-32. P. 1441–1448. Nov.1984
106. Интегралы и ряды. Прудников А.П. Брычков Ю.А. Маричев О.И. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981
107. L.A.Pipes. Matrix theory of multiconductor transmission lines. Phil. Mag. s.7. Vol. 24. No. 159. P. 97–113. July 1937.
108. L.A.Pipes. Steady-state analysis of multiconductor transmission lines. Journal of App. Phys. Vol. 12. No. 11. 1941.
109. L.A.Pipes. Transient analysis of completely transposed multiconductor transmission lines. AJEE Transactions. 1941. Vol. 60. P. 346–350.
110. S.A.Schelkunoff. Conversion of Maxwell's equations into generalized telegrapher's equations. Bell Syst. Tech. J. Vol. 34. P. 995–1043. Sept.1955.
111. H.Amemiya. Time-domain analysis of multiple parallel transmission lines. RCA Review. P. 241–276. June 1967.
112. K.D.Marx. Propagation modes. equivalent circuits, and characteristic terminations for multiconductor transmission lines with inhomogeneous dielectrics. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-21. No. 7. P. 450–457. July 1973.
113. C.R.Paul. On uniform multimode transmission lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. P. 556–558. August 1973.
114. C.R.Paul. Introduction to Electromagnetic Compatibility. John Wiley. 1992.
115. C.R.Paul. Analysis of multiconductor transmission lines. John Wiley. 1994.
116. F-Y.Chang. Transient analysis of lossless coupled transmission lines in a nonhomogeneous dielectric medium. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-18. No. 9. P. 616–626. Sept. 1970.
117. S.Frankel. Multiconductor transmission line analysis. Artech House. 1977.
118. I.V.Lindell. On the quasi-TEM modes in inhomogeneous multiconductor transmission lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-29. No. 8. P. 812–817. Aug. 1981.
119. I.V.Lindell. Theory of time-domain quasi-TEM modes in inhomogeneous multiconductor lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-35. P. 893–897. Oct. 1987.
120. A.R.Djordjevic. T.K.Sarkar, and R.F.Harrington. Time-domain response of multiconductor transmission lines. IEEE Proc. Vol. 75. No. 6. P. 743–764. June 1987.
121. F.Olyslager. E.Laermans, and D.D.Zutter. "Rigorous quasi-TEM analysis of multiconductor transmission lines in bi-isotropic media - Part I: Theoretical analysis for general inhomogeneous media and generalization to bianisotropic media." IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-43. No. 7. P. 1409–1415. July 1995.
122. G.W.Pan. K.S.Olson, and B.K.Gilbert. Improved algorithmic methods for the prediction of wavefront propagation behavior in multiconductor transmission lines for high frequency digital signal processors. IEEE Trans. Computer Aided Design. Vol. 8. No. 6. June 1989.
123. F-T.Lei. G-W.Pan, and B.K.Gilbert. "Examination, clarification, and simplification of modal decoupling method for multiconductor transmission lines." IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-43. No. 9. P. 2090–2100. Sept.1995.
124. G.G.Gentili, and M.Salazar-Palma. "The definition and computation of modal characteristic impedance in quasi-TEM coupled transmission lines." IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-43. No. 2. P. 338–343. Feb.1995.
125. E.G.Farr. C.H.Chan, and R.Mitra. A Frequency-dependend coupled mode analysis of multiconductor microstrip lines with application to VLSI interconnection problems. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-34. No. 2. P. 307–310. Feb. 1986.

126. R.Wang and O.Wing. A circuit model of a system of VLSI interconnects for time response computation. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-39. P. 688–693. Apr. 1991.
127. L.Carin and K.J.Webb. Isolation effects in single- and dual plane VLSI interconnects. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-38. No. 4. P. 396–404. April 1990.
128. G.L.Matthei, J.C.-H.Shu, and S.I.Long. Simplified calculation of wave-coupling between lines in high-speed integrated circuits. *IEEE Trans. on Circuits and Systems.* Vol. 37. No.10. P. 1201–1208. Oct.1990.
129. J.E.Schutt-Aine and R.Mitra. Nonlinear transient analysis of coupled transmission lines. *IEEE Trans. Circuits and Systems.* Vol. CAS-36. P. 959–967. July 1989.
130. H.Echigo and R.Sato. Calculation of transient response in logic circuits connected with coupled line. *Int. Symp. Electromagn. Compart. Nagoya.* Sept. 8–10. 1989. Vol. 1. P. 410–415. Tokyo. 1989.
131. A.R.Djordjevic, T.K.Sarkar, and R.F.Harrington. Analysis of lossy transmission lines with arbitrary nonlinear terminal networks. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-34. P. 660–665. June 1986.
132. S.Lin and E.S.Kuh. "Transient simulation of lossy interconnects based on the recursive convolution formulation." *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications.* Vol. 39. No. 11. P. 879–892. Nov.1992.
133. I.Maio, S.Pignary and F.Canavero. Efficient transient analysis of nonlinearly loaded low-loss multiconductor interconnects. *International Journal on Analog Integrated Circuits and Signal Processing.* Vol. 5. P. 7–17. Jan.1994.
134. O.A.Palusinski and A.Lee. Analysis of transients in nonuniform multiconductor transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-37. P. 127–138. Jan. 1989.
135. M.A.Mehalic and R.Mitra. Investigation of tapered multiple microstrip lines for VLSI circuits. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-38. P. 1559–1567. Nov. 1990.
136. T.Dhaene, L.Martens, and D.Zutter. "Transient simulation of arbitrary nonuniform interconnection structures characterized by scattering parameters." *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications.* Vol. 39. No. 11. P. 928–937. Nov.1992.
137. V.K.Tripathi and N.Orhanovic. "Time-domain characterization and analysis of dispersive dissipative interconnects." *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications.* Vol. 39. No. 11. P. 938–945. Nov.1992.
138. F.-Y.Chang. Transient simulation of nonuniform coupled lossy transmission lines characterized with frequency-dependent parameters - Part I: Waveform relaxation analysis. *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications.* Vol. 39. No. 8. P. 585–603. August 1992.
139. F.-Y.Chang. Transient simulation of nonuniform coupled lossy transmission lines characterized with frequency-dependent parameters - Part II: Discrete-Time analysis. *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications.* Vol. 39. No. 11. P. 907–927. November 1992.
140. Q.Gu and J.A.Kong. Transient analysis of single and coupled lines with capacitively-loaded junctions. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-34. No. 9. P. 952–964. Sept.1986.
141. G.W.Pan, K.S.Olson, and B.K.Gilbert. Frequency-domain solution for coupled striplines with crossing strips. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. 39. P. 1013–1017. June 1991.
142. A.K.Agrawal, H.M.Fowles, L.D.Scot and S.H.Gurbahani. Application of modal analysis to the transient response of multiconductor transmission lines with branches. *IEEE Trans. Electromagn. Compart.* Vol. EMC-21. No. 3. August 1979.
143. T.Razban. Transient analysis of partially coupled lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-35. P. 530–533. May 1987.
144. F.M.Teshe and T.K.Liu. Application of multiconductor transmission line network analysis to internal interaction problems. *Electromagnetics.* Vol. 6. No.1. P. 1–20. 1986.
145. H.Liao and W.W.-M.Dai. "Wave spreading evaluation of interconnect systems." *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-43. No. 10. P. 2486–2491. Oct.1995.

146. A.R.Djordjevic and T.K.Sarkar. Analysis of time response of lossy multiconductor transmission line networks. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-35. P. 898–907. Oct.1987.
147. D.Winkelstein. R.Pomerleau and M.Steer. Transient simulation of complex. lossy. multi-port transmission line networks with nonlinear digital device termination using a circuit simulator. *Proc. of IEEE SOUTHEASTCON'89.* Vol. 3. P. 1239–1244. Apr.9–12. 1989.
148. J.Poltz. "Optimizing VLSI interconnect model for SPICE simulation." *International Journal on Analog Integrated Circuits and Signal Processing.* Vol. 5. P. 87–94. Jan.1994.
149. J.E.Bracken. V.Raghavan. R.A.Rohrer. "Interconnect simulation with asymptotic waveform evaluation (AWE)." *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications.* Vol. 39. No. 11. P. 869–878. Nov.1992.
150. M.Celik and A.Cangellaris. Simulation of dispersive multiconductor transmission lines by Pade approximation via the Lanczos process. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-44. P. 2525–2535. December 1996.
151. M.S.Nakhla. "Analysis of pulse propagation on high-speed VLSI chips". *IEEE Journal of solid-state circuits.* Vol. 25. P. 490–494. April 1990.
152. J.R.Griffith and M.S.Nakhla. Time-domain analysis of lossy coupled transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-38. P. 1480–1487. Oct. 1990.
153. R.Griffith. E.Chiprout. Q.Zhang and M.Nakhla. "A CAD framework for simulation and optimization of high-speed VLSI interconnections." *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications.* Vol. 39. No. 11. P. 893–906. Nov.1992.
154. Q-J.Zhang and M.S.Nakhla. "Statistical simulation and optimization of high-speed VLSI interconnects." *International Journal on Analog Integrated Circuits and Signal Processing.* Vol. 5. P. 95–105. Jan.1994.
155. A. Feller. H.R. Kaupp and J.J. Digiacomо. Crosstalk and reflections in high-speed digital systems. *Proceeding – Fall Joint Computer Conf.* 1965.
156. S.D. Malaviya. V.P.Singh. Transmission Lines Loaded at Regular Intervals. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.* Vol. MTT-27. P. 854–859. October 1979.
157. C.-W. Hsue. Elimination of Ringing Signals for a Lossless. Multiple-Section Transmission Line. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-37. P. 1178–1183. August 1989.
158. Н.А.Леонтьев. Анализ временного отклика в межсоединениях быстродействующих радиоэлектронных схем: Дис. ... канд. тех. наук. —Томск: ТУСУР. 2000. —164 с.
159. H.Amemiya. Time-domain analysis of multiple parallel transmission lines. *RCA Review.* P. 241–276. June 1967.
160. G.W.Pan. K.S.Olson, and B.K.Gilbert. Frequency-domain solution for coupled striplines with crossing strips. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. 39. P. 1013–1017. June 1991.
161. Т.Р. Газизов. Н.А. Леонтьев. Аналитические выражения для временного отклика двух последовательно соединенных отрезков линии передачи. *Труды ТУСУР.* Том 1. 1997 с.63–67.
162. T.R.Gazizov and N.A.Leontiev. Analytical Expression for Transient Response of a Periodic Structure Consisting of Two Kinds of Transmission Line Sections With Capacitively Loaded Junctions. *Proc. of the 4-th Int. Symp. on Antennas and EM Theory.* August 19–22. 1997. Xi'an. China.
163. T.R.Gazizov and N.A.Leontiev. Transient Response of a Periodic Transmission Line Structure With Capacitively Loaded Junctions. *Proc. of the 1997 Sino-Japanese Joint Meeting on Optical Fiber Science and Electromagnetic Theory.* October 14–16. 1997. P. 322–327. Wuhan. China.
164. N.A.Leontiev and T.R.Gazizov. Analytical Expressions for Transient Response of a Periodic Structure Consisting of Even Number of Transmission Lines' Sections Capacitively Loaded at Junction. *Proc. of the Third Int. Symp. on Application of the Conversion Research Results for International Cooperation.* Tomsk. Russia. May 18–20. 1999. Vol. 1. P. 82–84.

165. А.с. №1019680. Монтажная плата /Кузнецов М.С. Жуков В.В. Хетагуров Я.А. Мелик-Оганжян Г.И. и Мошков А.А.— МКИ Н05К3/00.— Заявл. 10.12.81. №3363736/18–21; Оpubл. 23.05.83 в Б.И. №19.
166. А.с. №1540042. Экранированная печатная плата для линий передачи импульсных сигналов /Кечиев Л.Н. Цирин И.В. Писаревский В.А. Зима М.А. Пупков Н.О. и Фомичёв И.А.— МКИ Н05К1/02. 9/00.— Заявл. 31.05.88. №4450012/24–21; Оpubл. 30.01.90 в Б.И. №4.
167. А.с. №1564741. Тканная коммутационная плата. /Кечиев Л.Н. Цирин И.В. Зима М.А. Мокеев М.Н. и Лапин М.С.— МКИ Н05К1/02.— Заявл. 29.04.88. №4419982/24–21; Оpubл. 15.05.90 в Б.И. №18.
168. Ненашев А.П. Конструирование радиоэлектронных средств: Учеб. для радиотехнич. спец. вузов.—М.: Высшая школа. 1990.— 432 с.
169. Технология многослойных печатных плат /А.А.Федулова. Ю.А.Устинов. Е.П.Котов и др.— М.: Радио и связь. 1990.— 208 с.
170. G.R.Stoehr. Cutting Prototype Development Time and Costs Using Multiwire Technology. *Electronic Manufacturing*. May 1988. P. 17–19.
171. Патент №2013032 (Россия) Монтажная плата /Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники; Н.И.Базенков. Т.Р.Газизов.— Заявл. 25.03.91. №4921967/21 (025008); Оpubл. в Б. И. 1994. №9.
172. Ненашев А.П. Конструирование радиоэлектронных средств: Учеб. для радиотехнич. спец. вузов.—М.: Высшая школа. 1990.— 432 с.
173. Справочник по расчёту и конструированию СВЧ полосковых устройств /С.И.Бахарев. В.И.Вольман. Ю.Н.Либ и др.; Под ред. В.И.Вольмана.—М.: Радио и связь. 1982.—328 с.
174. Справочник по пайке: Справочник /Под ред. И.Е.Петрунина.—2-е изд. перераб. и доп.—М.: Машиностроение. 1984.—400 с.
175. Q.Gu and J.A.Kong. Transient analysis of single and coupled lines with capacitively-loaded junctions. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-34. No. 9. P. 952–964. Sept.1986.
176. Базенков Н.И. Нелинейные эффекты и электромагнитная совместимость: Учебное пособие.—Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники. 1997.— 216 с.
177. K.D.Marx. Propagation modes, equivalent circuits, and characteristic terminations for multiconductor transmission lines with inhomogeneous dielectrics. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-21. No. 7. P. 450–457. July 1973.
178. R.Faraji-Dana and Y.L.Chow. The current distribution and AC resistance of a microstrip structure. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. MTT-38. P. 1268–1277. Sept.1990.
179. Конструкторско-технологические основы проектирования полосковых микросхем /И.П.Бушминский. А.Г.Гудков. В.Ф.Дергачев и др.; Под ред. И.П.Бушминского.—М.: Радио и связь. 1987.
180. H.Amemiya. Time-domain analysis of multiple parallel transmission lines. *RCA Review*. P. 241–276. June 1967.
181. Кузнецов П.И. Стратонович Р.Л. Об оптимальном переходе между двумя различными однородными длинными линиями.—*Радиотехника*. 1954. т.9. №2. с. 13–20.
182. С.-W.Hsue. Elimination of ringing signals for a lossless, multiple-section transmission line. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-37. P. 1178–1183. Aug. 1989.
183. R.C.Frye and H.Z.Chen. Optimal self-damped lossy transmission line interconnections for multichip modules. *IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Analog and digital signal processing*. Vol. 39. No. 11. P. 765–771. Nov.1992.
184. D.Nayak. L.T.Hwang and I.Turlik. Simulation and design of lossy transmission lines in a thin-film multichip package. *IEEE Trans. Comp. Hybrids and Manuf. Tech.* Vol. 13. No. 2. P. 294–302. June 1990.
185. Стрижевский Н.З. Взвешенное рассогласование кабеля.—*Электросвязь*. 1991. №9. с.24.
186. A.Feller. H.R.Kaupp, and J.J.Digiacomо. “Crosstalk and reflections in high-speed digital systems”. *Proc.* — Fall Joint Computer Conf. 1965. P. 512–525.

187. Пат. №3764727 (США) Electrically conductive flat cable structures /J.W.Balde.—МКИ H01b7/08. H01b11/02.—Заявл. 12.06.72; Оpubл. 9.10.73.
188. А. с. №1129749 (СССР). Монтажная плата /Чермошенцев С.Ф. Шайдуллин И.Я. Шувалов Л.Н.— МКИ H05K1/02.—Заявл.18.05.83. №3593564/24-21; Оpubл. 15.12.84 в Б.И. №46.
189. L.Carlin and K.J.Webb. Isolation effects in single- and dual plane VLSI interconnects. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-38. No. 4. P. 396–404. April 1990.
190. A.R.Djordjevic. T.K.Sarkar, and R.F.Harrington. Time-domain response of multiconductor transmission lines. IEEE Proc. Vol. 75. No. 6. P. 743–764. June 1987.
191. Guggenbuhl W, and Morbach G Forfard crosstalk compensation on bus lines. IEEE Trans. on CAS—I. v.CAS-40. №8. P. 523–527. August 1993.
192. Krage M.K. Haddad G.I. Characteristics of coupled microstrip lines.—I: Evaluation of coupled-line parameters. IEEE Trans. on MTT. 1970. v.MTT-18. №4. P. 222–228.
193. Красноперкин В.М. Самохин Г.С. Силин Р.А. Подвешенные связанные полосковые линии.— Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1983. вып. 6(354). с. 29–33.
194. M.Horto and R.Marques. Coupled microstrips on double anisotropic layers. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-32. P. 467–470. Apr.1984.
195. R.S.Tomar and P.Bhartia. New quasi-static models for the computer-aided design of suspended and inverted microstrip lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-35. P. 453–457. Apr.1987.
196. Красноперкин В.М. Самохин Г.С. Силин Р.А. Анализ характеристик подвешенной и обращённой полосковых линий.— Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1981. вып. 12(336). с. 32–38.
197. Гвоздев В.И. Кузаев Г.А. Назаров И.В. Топологические ключи для пикосекундной цифровой обработки СВЧ-сигналов. Микроэлектроника. 1995. т.24. №1. с.16–29.
198. F.M.Teshe and T.K.Liu. Application of multiconductor transmission line network analysis to internal interaction problems. Electromagnetics. Vol. 6. No.1. P. 1–20. 1986.
199. A.R.Djordjevic and T.K.Sarkar. Analysis of time response of lossy multiconductor transmission line networks. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-35. P. 898–907. Oct.1987.
200. J.E.Bracken. V.Raghavan. R.A.Rohrer. Interconnect simulation with asymptotic waveform evaluation (AWE). IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundamental Theory and Applications. Vol. 39. No. 11. P. 869–878. Nov.1992.
201. J.R.Griffith and M.S.Nakhla. Time-domain analysis of lossy coupled transmission lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-38. P. 1480–1487. Oct. 1990.
202. O.A.Palusinski and A.Lee. Analysis of transients in nonuniform multiconductor transmission lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-37. P. 127–138. Jan. 1989.
203. F.-Y.Chang. Transient simulation of nonuniform coupled lossy transmission lines characterized with frequency-dependent parameters - Part I: Waveform relaxation analysis. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications. Vol. 39. No. 8. P. 585–603. August 1992; Part II: Discrete-Time analysis. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications. Vol. 39. No. 11. P. 907–927. November 1992.
204. G.W.Pan. K.S.Olson, and B.K.Gilbert. Frequency-domain solution for coupled striplines with crossing strips. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. 39. P. 1013–1017. June 1991.
205. Вуль В.А. Помехозащищённость наносекундных цифровых узлов.—Л.: Энергия. 1977.
206. J.A.De Falco. Predicting Crosstalk in Digital Systems. Computer Design. June. 1973. P. 69–75
207. T.R.Gazizov and N.I.Bazhenkov. On the crosstalk reduction in printed circuit boards. Proc. of the 12-th Int. Wroclaw Symp. on EMC. Wroclaw. Poland. June 28 – July 1. 1994. P. 550–553
208. Djordjevic A.R. Sarkar T.K, and Harrington R.F. Time-domain response of multiconductor transmission lines // IEEE Proc. June 1987. Vol. 75. N.6. P.743–764.

209. Marshall J.B. Flat cable aids transfer of data // *Electronics*. N.4. 1973. P.89–94.
210. Krage M.K. Haddad G.I. Characteristics of coupled microstrip lines.–II: Evaluation of coupled-line parameters // *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.* 1970. April 1970. Vol. 18. N.4. P.222–228.
211. Gilb J.P, and Balanis C.A. Pulse distortion on multilayer coupled microstrip lines // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Oct. 1989. Vol. 37. P.1620–1627.
212. Horno M, and Marques R. Coupled microstrips on double anisotropic layers // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Apr. 1984. Vol. 32. P.467–470.
213. Gazizov T.R. Low-cost PCB with high-speed and high-density interconnects // *Digest XXVth General Assembly of URSI*. Toronto. Ontario. Canada. Aug. 13–21. 1999. P.264.
214. Gazizov T.R. Far-end crosstalk reduction in double-layered dielectric interconnects // *IEEE Trans. on EMC*. Vol. 43. N.4. Nov. 2001. P.566–572.
215. Gazizov T.R, and Leontiev N.A. An effect of far-end crosstalk compensation in double-layered dielectric PCB interconnects // *Proc. of the 14th Int. Wroclaw Symp. on EMC*. Wroclaw. Poland. June 23–25. 1998. P.353–356.
216. Gazizov T.R, and Leontiev N.A. Compensation of far-end crosstalk in interconnects of a double-layered dielectric PCB // *Proc. 13th Int. Zurich Symp. on Electromagnetic Compatibility*. Zurich. Switzerland. Feb. 16–18. 1999. P.645–648.
217. Gazizov T.R, and Leontiev N.A. Far-end crosstalk compensation by changing the separation of coupled transmission lines // *Proc. of the third Int. Symp. on Application of the Conversion Research Results for International Cooperation*. Tomsk. Russia. May 18–20. 1999. Vol. 1. P.79–81.
218. Gazizov T.R. Leontiev N.A. Kuznetsova-Tadjibaeva O.M. Simple and low-cost method of far end crosstalk reduction in coupled microstrip lines // *Proc. 2000 Int. Symp. on Antennas and Propagation*. Fukuoka. Japan. August 22–25. 2000. Vol. 3. P.1355–1358.
219. Gazizov T.R. Leontiev N.A. Kuznetsova-Tadjibaeva O.M. Far end crosstalk reduction in coupled microstrip lines with covering dielectric layer // *Proc. of the 15th Int. Wroclaw Symp. on Electromagnetic Compatibility*. Wroclaw. Poland. 27–30 June. 2000. P.45–49.
220. Arabi T.R. et al. On the modeling of conductor and substrate losses in multiconductor, multielectric transmission line systems // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* July 1991. Vol. 39. P.1090–1097.
221. Maio I. Pignary S, and Canavero F. Efficient transient analysis of nonlinearly loaded low-loss multiconductor interconnects // *Int. J. on Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. Jan.1994. Vol. 5. P.7–17.
222. Wu Ke. Electromagnetic analysis of multiconductor losses and dispersion in high-speed interconnects // *Int. J. on Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. Jan.1994. Vol. 5. P.48–55.
223. Carin L, and Webb K.J. An equivalent circuit model for terminated hybrid-mode multiconductor transmission lines // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Nov. 1989. N.11. P.1784–1793.
224. Gazizov T.R, and Leontiev N.A. Reduction of high-speed signal distortions in double-layered dielectric PCB interconnects // *Digest 6th Topical Meeting on Electrical Performance of Electronic Packaging*. San Jose. California. USA. Oct. 27–29. 1997. P.67–69.
225. Tomar R.S, and Bhartia P. New quasi-static models for the computer-aided design of suspended and inverted microstrip lines // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Apr.1987. P.453–457.
226. Guggenbuhl W, and Morbach G. Forward crosstalk compensation on bus lines // *IEEE Trans. on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*. August 1993. Vol. 40. N.8. P.523–527.
227. Cherry P.C, and Iskander M.F. FDTD Analysis of high frequency electronic interconnection effects // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Oct. 1995. Vol. 43. P.2445–2451.

228. Heeb H, and Ruehli A.E. Three-dimensional interconnect analysis using partial element equivalent circuits // *IEEE Trans. on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*. Vol. 39. N.11. Nov. 1992. P.974–982.
229. Coen G De Zuter D, and Fache N. Automatic derivation of equivalent circuits for general microstrip interconnection discontinuities // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*. July 1996. Vol. 44. P.1011–1016.
230. Gu Q, and Kong J.A. Transient analysis of single and coupled lines with capacitively-loaded junctions // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*. Sept.1986. Vol. 34. P.952–964.
231. Pan G.W. Olson K.S, and Gilbert B.K. Improved algorithmic methods for the prediction of wavefront propagation behavior in multiconductor transmission lines for high frequency digital signal processors // *IEEE Trans. Computer Aided Design*. June 1989. Vol. 8. N.6. P.609–621.
232. Pan G.W., Olson K.S. and Gilbert B.K. Frequency-domain solution for coupled striplines with crossing strips // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*. June 1991. Vol. 39. P.1013–1017.
233. Amemiya H. Time-domain analysis of multiple parallel transmission lines // *RCA Review*. June 1967. P.241–276.
234. De Falco J.A. Predicting crosstalk in digital systems // *Computer Design*. June. 1973. P.69–75.
235. Carin L. and Webb K.J. Isolation effects in single- and dual plane VLSI interconnects // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*. April 1990. Vol. 38. N.4. P.396–404.
236. Wei C. et al. Multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*. Apr. 1984. Vol. 32. P.439–450.
237. Газизов Т.Р. Моделирование прямых перекрёстных помех в длинной многопроводной микрополосковой линии с покрывающим диэлектрическим слоем // Сб. науч. докл. IV Межд. Симп. по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. Санкт-Петербург. 19–22 июня 2001. С.146–150.
238. H.You. M.Soma. Crosstalk Analysis of Interconnection Lines and Packages in High-Speed Integrated Circuits. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. P. 1019–1026. No. 8. 1990.