



Электромагнитная совместимость:

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

С.П. Куксенко



3 МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

3.1 Конечно-разностная аппроксимация

Метод конечных разностей (МКР, FDM) разработан А. Томом в 1920 г. под названием «Метод квадратов» для решения нелинейных уравнений гидродинамики. С тех пор метод нашел применение для решения задач из различных областей. Методы конечных разностей основаны на аппроксимациях, которые позволяют заменить дифференциальные уравнения уравнениями конечных разностей. Разностные уравнения имеют алгебраический вид. Они ставятся в соответствие значению зависимой переменной в точке расчетной области значение в некоторой соседней точке. Решение методом конечных разностей в основном состоит из трех этапов: деления области решения на сетку узлов; аппроксимации данного дифференциального уравнения разностным эквивалентом; решения разностных уравнений с учетом заданных граничных и начальных условий. Таким образом, при вычислениях МКР осуществляется аппроксимация производных функций одной или нескольких переменных значениями этой функции в дискретном множестве значений аргументов (в узлах). Совокупность узлов образует сетку, покрывающую расчетную область [32].

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ и имеет производную в точке B ($x = x_0$), равную тангенсу угла наклона касательной DE в этой точке (рисунок 3.1). Таким образом, существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$\begin{aligned} f'_{FD}(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Ее можно вычислить в близко расположенной точке, например в точке C . Тогда $\Delta x = h_2$ и

$$f'_{FD}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0)}{h_2}.$$

Это так называемая правая или правосторонняя конечно-разностная формула (в англоязычной литературе ее часто называют forward-difference). Вычислим вторую производную:

$$\begin{aligned}
 f''_{FD}(x_0) &\approx \frac{f'\left(x_0 + \frac{3}{2}h_2\right) - f'\left(x_0 + \frac{1}{2}h_2\right)}{h_2} = \\
 &= \frac{1}{h_2} \left[\frac{f(x_0 + 2h_2) - f(x_0 + h_2)}{h_2} - \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0)}{h_2} \right] = \\
 &= \frac{f(x_0 + 2h_2) - 2f(x_0 + h_2) + f(x_0)}{h_2^2}.
 \end{aligned}$$

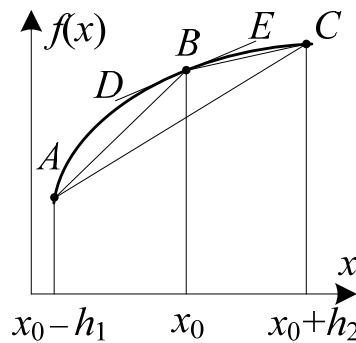


Рисунок 3.1 – Аппроксимация производной конечными разностями

С тем же успехом можно использовать левую или левостороннюю формулу (backward-difference):

$$\begin{aligned}
 f'_{BD}(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}.
 \end{aligned}$$

Тогда в точке A ($x = x_0 - h_1$) получим

$$f'_{BD}(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h_1)}{h_1}. \quad (3.1)$$

Расстояние между точками, в которых вычисляются значения функции, называется шагом сетки (поэтому метод конечных разностей также называют методом сеток). В данном случае шаги

отличаются по значению, т. е. используется неравномерная сетка. Вычислим вторую производную:

$$\begin{aligned} f''_{BD}(x_0) &\approx \frac{f'\left(x_0 - \frac{1}{2}h_1\right) - f'\left(x_0 - \frac{3}{2}h_1\right)}{h_1} = \\ &= \frac{1}{h_1} \left[\frac{f(x_0) - f(x_0 - h_1)}{h_1} - \frac{f(x_0 - h_1) - f(x_0 - 2h_1)}{h_1} \right] = \\ &= \frac{f(x_0) - 2f(x_0 - h_1) + f(x_0 - 2h_1)}{h_1^2}. \end{aligned}$$

Еще одним вариантом является использование центральной или двусторонней разностной формулы (central-difference)

$$f'_{CD}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0 - h_1)}{h_1 + h_2}.$$

Последняя формула дает более точное, чем предыдущие, решение, поскольку значение производной равно тангенсу угла наклона хорды AC , что ближе к точному решению.

При $h_2 = h_1 = h$ получим

$$f'_{CD}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \quad (3.2)$$

Далее, используя центральные разности и полагая, что $h_2 = h_1 = h$, вычислим вторую производную:

$$\begin{aligned} f''_{CD}(x_0) &\approx \frac{f'(x_0 + h/2) - f'(x_0 - h/2)}{h} = \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right], \\ f''_{CD}(x_0) &\approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Эта формула называется второй разностной производной. В ней точка, в которой аппроксимируется производная, центральная среди точек, вовлеченных в аппроксимацию. Зависимость производной (3.3) от значений функции $f(x)$ в точках, используемых для аппроксимации, часто иллюстрируется «шаблоном» или «молекулой», как показано на рисунке 3.2.

Необходимо отметить важность правосторонних и левосторонних разностей.

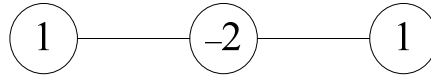


Рисунок 3.2 – Трехточечный шаблон для второй разностной производной (одномерный случай)

Так, на рисунке 3.3 схематично показана ситуация, когда неприменимы ни левосторонние, ни центральные разности, поскольку для их использования необходимо знать значение функции в точке x_{-1} ($x_0 - h$).

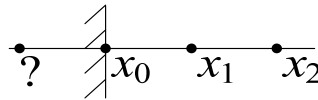


Рисунок 3.3 – Случай применимости только правосторонних разностей

Оценим количественно ошибку конечно-разностных аппроксимаций. Это можно сделать, используя разложение функции в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
 FD: f(x_0 + h_2) &= \\
 &= f(x_0) + h_2 f'(x_0) + \frac{1}{2!} h_2^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} h_2^3 f'''(x_0) + \dots, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BD: f(x_0 - h_1) &= \\
 &= f(x_0) - h_1 f'(x_0) + \frac{1}{2!} h_1^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} h_1^3 f'''(x_0) + \dots \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Видно, что оценки (3.4) и (3.5) имеют погрешность порядка $h_{1,2}$ (записывается как $O(h_{1,2})$), возникающую за счет отбрасывания высших членов ряда Тейлора. Вычтем (3.5) из (3.4):

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + h_2) - f(x_0 - h_1) &= \\
 &= (h_2 + h_1) f'(x_0) + \frac{1}{2!} (h_2^2 - h_1^2) f''(x_0) + O(h^3). \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Поделив левую и правую части выражения (3.6) на $h_2 + h_1$, получим

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0 - h_1)}{h_2 + h_1} + O(h_2 - h_1), \quad (3.7)$$

т.е. формулу, которая также имеет первый порядок погрешности. Однако при $h_1 = h_2 = h$ в формуле (3.6) исчезает член, содержащий вторую производную, и тогда получим формулу

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2), \quad (3.8)$$

имеющую погрешность $O(h^2)$. Сложим (3.4) и (3.5):

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + O(h^4). \quad (3.9)$$

Поделив это выражение на h^2 , получим производную (3.3), погрешность которой имеет порядок $O(h^2)$.

Таким образом, погрешность конечно-разностных формул определяется значением шага h . Чем меньше шаг, тем формула точнее. Однако при неограниченном уменьшении шага погрешность вычисления производных начинает увеличиваться, так как при этом разность между значениями функции в соседних узлах сетки уменьшается, что приводит к возрастанию влияния ошибок округления. Типовая зависимость погрешности конечно-разностной формулы от шага сетки показана на рисунке 3.4.

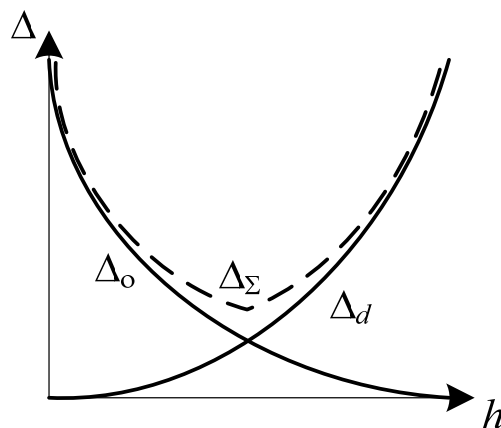


Рисунок 3.4 – Зависимость погрешности конечно-разностной аппроксимации от шага сетки: Δ_d – погрешность, вызванная отбрасыванием высших членов ряда Тейлора; Δ_0 – погрешность, вызванная конечной точностью представления чисел; Δ_Σ – суммарная погрешность

3.2 Способы повышения точности вычислений

3.2.1 Разложение в ряд Тейлора

Рассмотрим способы повышения точности. Сначала используем трехточечный шаблон и правосторонние разности. Для этого потребуются три точки: x_0 , x_0+h , x_0+2h . Далее воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции в этих точках:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2f''(x_0) + O(h^3);$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) + O(h^3).$$

Вычитая второе уравнение из первого, умноженного на 4, получим выражение для производной FD :

$$f'_{FD}(x_0) = \frac{4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h) - 3f(x_0)}{2h}. \quad (3.10)$$

При использовании трехточечного шаблона и левосторонних разностей запишем

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2f''(x_0) + O(h^3),$$

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) + O(h^3).$$

Также вычтем второе уравнение из первого, умноженного на 4:

$$4f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h) = 3f(x_0) - 2hf'(x_0) + O(h^3).$$

В результате получим выражение для производной BD :

$$f'_{BD}(x_0) = \frac{3f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{2h}.$$

Ее погрешность имеет порядок $O(h^2)$.

Применим пятиточечный шаблон (центральные разности). Для этого потребуется пять точек: x_0-2h , x_0-h , x_0 , x_0+h , x_0+2h . Далее воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции в этих точках:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_0) + \frac{1}{3!}h^3f'''(x_0) + O(h^4);$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_0) - \frac{1}{3!}h^3f'''(x_0) + O(h^4);$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{4}{2!}h^2f''(x_0) + \frac{8}{3!}h^3f'''(x_0) + O(h^4);$$

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + \frac{4}{2!}h^2f''(x_0) - \frac{8}{3!}h^3f'''(x_0) + O(h^4).$$

Вычитая второе уравнение из первого и четвертое из третьего, получим

$$S_h: f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{1}{3}h^3f'''(x_0) + O(h^4),$$

$$S_{2h}: f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h) = 4hf'(x_0) + \frac{8}{3}h^3f'''(x_0) + O(h^4).$$

Для исключения $f'''(x_0)$ вычислим $8S_h - S_{2h}$:

$$\begin{aligned} 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) - f(x_0 + 2h) + \\ + f(x_0 - 2h) = 12hf'(x_0) + O(h^4). \end{aligned}$$

В результате получим первую производную

$$f'_{CD}(x_0) = \frac{8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) - f(x_0 + 2h) + f(x_0 - 2h)}{12h}, \quad (3.11)$$

погрешность которой имеет порядок $O(h^4)$.

Для нахождения второй производной запишем:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{8}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) + \\ + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x_0) + O(h^6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{8}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) - \\ - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x_0) + O(h^6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_0 + 2h) &= f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) + \frac{4h^3}{3}f'''(x_0) + \\
&+ \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_0) + \frac{32h^5}{120}f^{(5)}(x_0) + O(h^6); \\
f(x_0 - 2h) &= f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) - \frac{4h^3}{3}f'''(x_0) + \\
&+ \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_0) - \frac{32h^5}{120}f^{(5)}(x_0) + O(h^6).
\end{aligned}$$

Сложив первое уравнение со вторым и третье с четвертым, получим

$$\begin{aligned}
S_h: f(x_0 + h) - f(x_0 - h) &= 2f(x_0) + h^2f''(x_0) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_0) + O(h^6), \\
S_{2h}: f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h) &= f(x_0) + 4h^2f''(x_0) + \frac{4}{3}h^2f^{(4)}(x_0) + O(h^6).
\end{aligned}$$

Для исключения $f^{(4)}(x_0)$ вычислим $S_h - S_{2h}/16$:

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h) - f(x_0 - h) - f(x_0 + 2h) + f(x_0 - 2h) &= \\
&= \frac{15}{8}f(x_0) + \frac{3}{4}h^2f''(x_0) + O(h^6).
\end{aligned}$$

В результате получим производную

$$\begin{aligned}
f''_{CD}(x_0) &= \\
&= \frac{-f(x_0 - 2h) + 16f(x_0 - h) - 30f(x_0) + 16f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h^2},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

погрешность которой имеет порядок $O(h^4)$.

3.2.2 Интерполяционные полиномы

Рассмотрим другой способ получения конечно-разностных аппроксимаций, заключающийся в использовании интерполяционных полиномов вида

$$P_{N-1}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j.$$

Тогда в окрестности x_0 можно предположить, что $f'(x_0) \approx P'(x_0)$ и $f''(x_0) \approx P''(x_0)$. Здесь N – нечетное количество эквидистантных точек в окрестности x_0 , таких, что $f_k = f(x_k)$, $x_k = x_0 + kh$, $k = -(N-1)/2, \dots, (N+1)/2$. Используя введенные обозначения, получим систему уравнений

$$\{P_{N-1}(x_k) = f_k\}, \quad k = -(N-1)/2, \dots, (N+1)/2.$$

Рассмотрим процесс нахождения $f'(x_0)$ и $f''(x_0)$ при $N=3$, для простоты полагая $x_0 = 0$. Запишем интерполяционный полином

$$P_{N-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Тогда $f'(0) \approx P'(0) = a_1$, $f''(0) \approx P''(0) = 2a_2$. Таким образом, для нахождения значений производных необходимо найти коэффициенты a_1 и a_2 . Для этого запишем систему уравнений

$$\begin{cases} P_2(-h) = f_{-1} \\ P_2(0) = f_0 \\ P_2(h) = f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 - a_1h + a_2h^2 = f_{-1} \\ a_0 = f_0 \\ a_0 + a_1h + a_2h^2 = f_1 \end{cases}.$$

Вычитая первое уравнение из третьего, получим

$$f'(0) \approx P'(0) = a_1 = \frac{-f_{-1} + f_1}{2h},$$

а сложив их и используя второе уравнение, получим $2f_0 + 2a_2h^2 = f_{-1} + f_1$. Тогда

$$f''(0) \approx P''(0) = 2a_2 = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2}.$$

Видно, что данные выражения аналогичны формулам (3.2) и (3.3).

Повышение точности аппроксимации производных возможно за счет увеличения степени интерполяционного полинома и использования большего числа точек, чем это необходимо для вычисления производной данного порядка. Рассмотрим процесс нахождения $f'(x_0) \approx P'(x_0)$ и $f''(x_0) \approx P''(x_0)$ при $N=5$ (пятиточечный шаблон). В данном случае получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P_4(-2h) = f_{-2} \\ P_4(-h) = f_{-1} \\ P_4(0) = f_0 \\ P_4(h) = f_1 \\ P_4(2h) = f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 - 2a_1h + 4a_2h^2 - a_3h^3 + 16a_4h^4 = f_{-2} \\ a_0 - a_1h + a_2h^2 - a_3h^3 + a_4h^4 = f_{-1} \\ a_0 = f_0 \\ a_0 + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + a_4h^4 = f_1 \\ a_0 + 2a_1h + 4a_2h^2 + a_3h^3 + 16a_4h^4 = f_2 \end{cases}.$$

Вычитая первое уравнение из пятого и второе из четвертого, получим систему

$$\begin{cases} 4a_1h + 16a_3h^3 = f_{-2} - f_2 \\ 2a_1h + 2a_3h^3 = f_1 - f_{-1} \end{cases},$$

а сложив их, —

$$\begin{cases} 2a_0 + 8a_2h^2 + 32a_4h^4 = f_{-2} + f_2 \\ 2a_0 + 2a_2h^2 + 2a_4h^4 = f_{-1} + f_1 \end{cases}.$$

Решая первую из этих систем относительно a_1 , найдем

$$f'(0) \approx P'(0) = a_1 = \frac{f_{-2} + 8f_1 - 8f_{-1} - f_2}{12h}.$$

Данное выражение эквивалентно (3.11), полученному с помощью разложения в ряд Тейлора. Решая вторую систему относительно a_2 (при $a_0 = f_0$), найдем

$$f''(0) \approx P''(0) = 2a_2 = \frac{-f_{-2} + 16f_{-1} - 30f_0 + 16f_1 - f_2}{12h^2}.$$

Погрешность имеет порядок $O(h^4)$. Данное выражение эквивалентно (3.12), полученному с помощью разложения в ряд Тейлора.

Запишем итоговые формулы для производных, полученные с помощью семиточечного шаблона ($N = 7$):

$$f'(0) \approx \frac{-f_{-3} + 9f_{-2} - 45f_{-1} + 45f_1 - 9f_2 + f_3}{60h},$$

$$f''(0) \approx \frac{2f_{-3} - 27f_{-2} + 270f_{-1} - 490f_0 + 270f_1 - 27f_2 + 2f_3}{12h^2}.$$

3.2.3 Многочлены Лагранжа

Рассмотрим способ получения конечно-разностных аппроксимаций за счет использования многочленов Лагранжа. Напомним, что интерполяционный многочлен Лагранжа – это многочлен минимальной степени, принимающий данные значения в данном наборе точек. Для $n + 1$ пар чисел $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, где все x_j различны, существует единственный многочлен $L(x)$ степени не более n , для которого $P(x_j) = f(x_j)$.

В общем виде базисные полиномы $P(x)$ определяются по формуле

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_k)} + \\ & + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_k)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_k)} + \\ & + \dots + f(x_k) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_j)}{(x_k-x_0)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_j)}. \end{aligned}$$

Для нахождения $f'(x_0)$ достаточно трех точек: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$. Тогда итоговый полином имеет вид

$$\begin{aligned} P_3(x) = & f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \\ & + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \end{aligned}$$

Продифференцировав его и сделав замену x на x_0, x_1 на x_0+h и x_2 на x_0+2h , получим

$$f'_{FD}(x_0) = P'_3(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}.$$

Данное выражение эквивалентно (3.10), а его погрешность будет $O(h^2)$.

Далее найдем $f''(x_0)$ с погрешностью $O(h^2)$, используя правосторонние разности. Для этого потребуются четыре точки: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$ и $x_3 = x_0 + 3h$. Тогда

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \\
&+ f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\
&+ f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \\
&+ f(x_3) \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.
\end{aligned}$$

Продифференцировав дважды многочлен $P_4(x)$ и заменив x на x_0 , x_1 на $x_0 + h$, x_2 на $x_0 + 2h$ и x_3 на $x_0 + 3h$, получим производную

$$f''_{FD}(x_0) = P''_4(x_0) = \frac{2f(x_0) - 5f(x_0 + h) + 4f(x_0 + 2h) - f(x_0 + 3h)}{h^2},$$

погрешность которой имеет порядок $O(h^2)$.

В таблице 3.1 приведены часто используемые конечно-разностные аппроксимации с указанием их погрешности.

Таблица 3.1 – Конечно-разностные аппроксимации и их погрешность

Конечно-разностная аппроксимация	Погрешность
$f'_{FD}(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	$O(h)$
$f'_{BD}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$	$O(h)$
$f'_{CD}(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$	$O(h^2)$
$f'_{FD}(x_0) = \frac{4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h) - 3f(x_0)}{2h}$	$O(h^2)$
$f'_{BD}(x_0) = \frac{3f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{2h}$	$O(h^2)$
$f'_{CD}(x_0) = \frac{8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) - f(x_0 + 2h) + f(x_0 - 2h)}{12h}$	$O(h^4)$
$f''_{FD}(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}$	$O(h^2)$

Окончание таблицы 3.1

Конечно-разностная аппроксимация	Погрешность
$f''_{BD}(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''_{CD}(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''_{CD}(x_0) =$ $= \frac{-f(x_0 - 2h) + 16f(x_0 - h) - 30f(x_0) + 16f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h^2}$	$O(h^4)$

3.3 Решение эллиптических уравнений

3.3.1 Двухмерное уравнение Лапласа: однородный диэлектрик

Первая проблема, с которой приходится сталкиваться при реализации конечно-разностного метода, – это вывод конечно-разностных уравнений в исследуемой пространственной области из соответствующего дифференциального уравнения в частных производных. Когда для анализа линии передачи используется уравнение Лапласа, распределение потенциала ищется в ограниченной области, которая разбивается координатными линиями на некоторое число элементарных ячеек. Каждая точка пересечения двух линий, являющихся сторонами ячейки, образует узел. Значения потенциала в узловых точках и являются искомыми величинами.

В двухмерном случае простейшая равномерная сетка соответствует декартовой системе координат и состоит из прямоугольных ячеек. Из каждого узла сетки, двигаясь вдоль сторон ячеек, можно попасть в четыре соседних узла (рисунок 3.5, а). Такая сетка называется пятиточечной. Если рассматривается трехмерная задача, то при движении по сетке из каждого узла можно попасть в шесть соседних. В этом случае сетка семиточечная.

Применим конечно-разностный подход, чтобы найти решение функции Φ , зависящей от двух пространственных переменных x и y (уравнение Лапласа):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.13)$$

Разделим область решения в плоскостях x и y на равные прямоугольники, как показано на рисунке 3.5, *a*. Обозначим координаты узлов

$$x = i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad y = j\Delta y, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

и значение функции в некоторой точке P

$$\Phi_P = \Phi(i, j) = \Phi(i\Delta x, j\Delta y).$$

Тогда, используя выражения (3.2) и (3.3), получим производные функции Φ в узле (i, j) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x |_{i,j} \approx \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2\Delta x};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_y |_{i,j} \approx \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2\Delta y};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi_{xx} |_{i,j} \approx \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Phi_{yy} |_{i,j} \approx \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{(\Delta y)^2}.$$

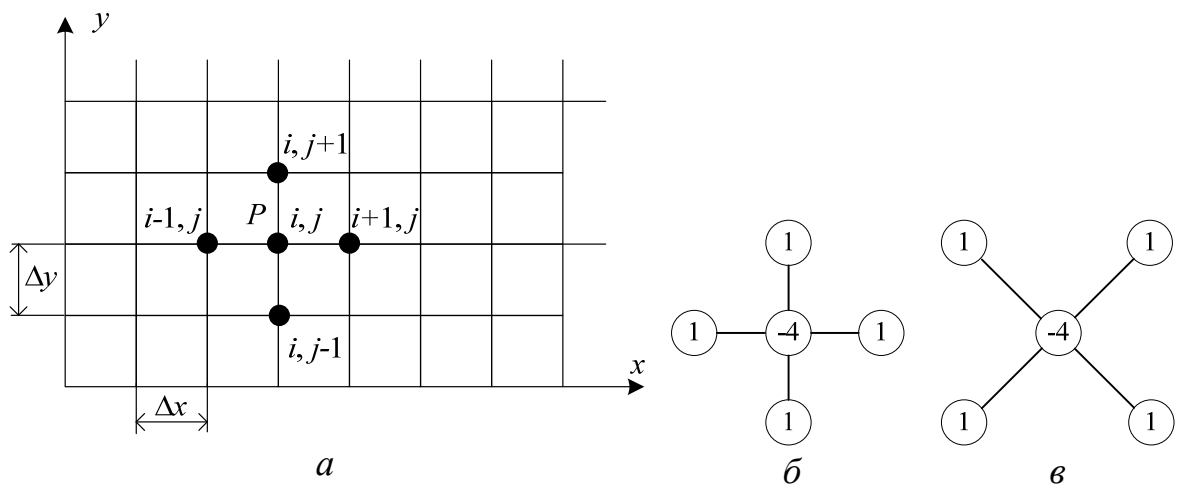


Рисунок 3.5 – Двухмерная конечно-разностная сетка (*a*), стандартный (*б*) и «косой» (диагональный) (*в*) двухмерные шаблоны

Подставляя эти выражения в уравнение (3.13), запишем его конечно-разностное представление:

$$\frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{(\Delta y)^2} = 0.$$

Полагая $\Delta x = \Delta y = h$, получим

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4} [\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)]. \quad (3.14)$$

Данное приближение называется пятиточечным центральным приближением лапласиана. Его шаблон (вычислительная молекула) приведен на рисунке 3.5, б (в отечественной литературе – пятиточечный шаблон «крест»).

Другое приближение можно получить с помощью четырех точек $(x \pm \Delta, t \pm \Delta)$, расположенных на двух диагоналях. Эти точки используются таким же образом, как и для первого приближения, с тем отличием, что изменится шаг сетки (расстояние между узловыми точками равно $\sqrt{2}h$). Соответствующий шаблон приведен на рисунке 3.5, в (в отечественной литературе – пятиточечный диагональный шаблон). Конечный вид для решаемого уравнения Лапласа

$$\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) = \frac{1}{4} \Phi(i, j).$$

Если комбинировать эти два пятиточечных шаблона, то можно получить девятиточечные шаблоны. Для этого удобно воспользоваться выражением

$$\alpha S_+ + (1 - \alpha) S_\times, \quad (3.15)$$

где S_+ – стандартный и S_\times – крестовый шаблоны.

Записав α в виде рационального числа a/b , при использовании пятиточечных шаблонов лапласиан $(\Delta\Phi)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \frac{1}{2bh^2} [& 2a\Phi(i+1, j) + 2a\Phi(i-1, j) + 2a\Phi(i, j+1) + 2a\Phi(i, j-1) + \\ & + (b-a)\Phi(i+1, j+1) + (b-a)\Phi(i+1, j-1) + (b-a)\Phi(i-1, j+1) + \\ & + (b-a)\Phi(i-1, j-1) - 4(a+b)\Phi(i, j)]. \end{aligned}$$

Легко заметить, что при $b = a = 1$ будем иметь стандартный пятиточечный шаблон. При $a = 1/2$ и $b = 3/2$, $a = 1$ и $b = 2$, $a = 2$ и

$b = 3$ получим ряд девятиточечных шаблонов с коэффициентами 8, 12 и 20 соответственно (в отечественной литературе их называют шаблонами типа «ящик»):

$$\frac{1}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{4h^2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично с использованием выражения (3.12) получим стандартный (в отечественной литературе иногда называется «большим крестом») и диагональный девятиточечные шаблоны:

$$\frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} & & -1 & & \\ & & 16 & & \\ -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ & & 16 & & \\ & & -1 & & \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{24h^2} \begin{bmatrix} -1 & & & & -1 \\ & 16 & & & 16 \\ & & -60 & & \\ & 16 & & & 16 \\ -1 & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Комбинируя эти два шаблона с помощью выражения (3.15), получим общее выражение для семнадцатиточечных шаблонов:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = & \frac{1}{24bh^2} [-2a\Phi(i-2, j) + 32a\Phi(i-1, j) + 32a\Phi(i+1, j) - 2a\Phi(i+2, j) - \\ & - 2a\Phi(i, j-2) + 32a\Phi(i, j-1) + 32a\Phi(i, j+1) - 2a\Phi(i, j+2) - \\ & - (b-a)\Phi(i-2, j-2) + 16(b-a)\Phi(i-1, j-1) + 16(b-a)\Phi(i+1, j+1) - \\ & - (b-a)\Phi(i+2, j+2) - (b-a)\Phi(i-2, j+2) + 16(b-a)\Phi(i-1, j+1) + \\ & + 16(b-a)\Phi(i+1, j-1) - (b-a)\Phi(i+2, j-2) - 60(a+b)\Phi(i, j)]. \end{aligned}$$

Так, при $a = b = 1$ будем иметь стандартный девятиточечный шаблон, а при $a = 1$ и $b = 2$ получим

$$\frac{1}{48h^2} \begin{bmatrix} -1 & & -2 & & -1 \\ & 16 & 32 & 16 & \\ -2 & 32 & -180 & 32 & -2 \\ & 16 & 32 & 16 & \\ -1 & & -2 & & -1 \end{bmatrix}.$$

Пример 3.1

Решить уравнение Лапласа (3.13) при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ и найти распределение потенциала в прямоугольной области, ограниченной идеально проводящими электродами (рисунок 3.6, а). Вычислительная модель с указанием используемых значений потенциалов и узлов сетки приведена на рисунке 3.6, б.

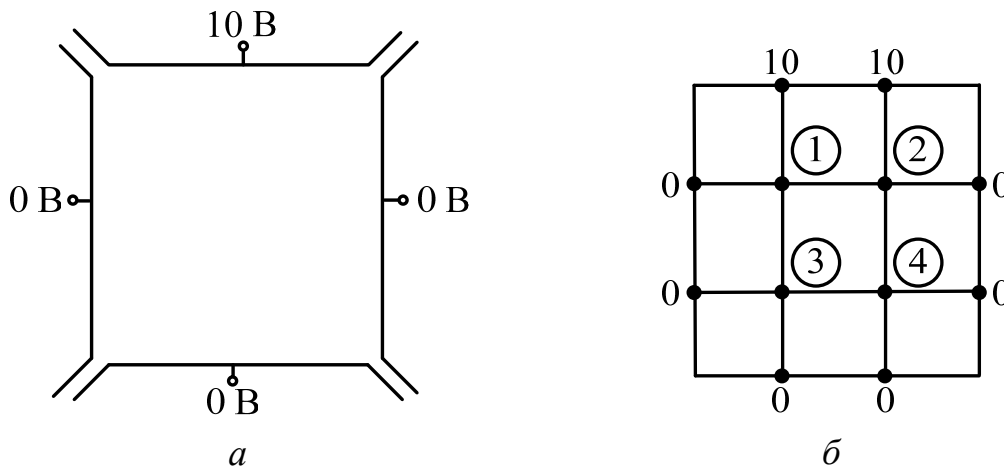


Рисунок 3.6 – К примеру решения конечно-разностных уравнений:
а – физическая модель; б – вычислительная модель

Решение

Используем пятиточечный шаблон, описываемый уравнением (3.14), и $h = 1/3$, а также итерационный метод для нахождения значений потенциала в узлах 1–4. При использовании метода Якоби уравнение (3.14) примет вид

$$\Phi(i, j)^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left[\Phi(i+1, j)^{(n)} + \Phi(i-1, j)^{(n)} + \Phi(i, j+1)^{(n)} + \Phi(i, j-1)^{(n)} \right],$$

где верхний индекс обозначает номер итерации. При использовании метода Гаусса – Зейделя (при организации вычислений по строкам) уравнению (3.14) соответствует

$$\Phi(i, j)^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left[\Phi(i+1, j)^{(n)} + \Phi(i-1, j)^{(n+1)} + \Phi(i, j+1)^{(n+1)} + \Phi(i, j-1)^{(n)} \right],$$

а метода релаксации –

$$\Phi(i, j)^{(n+1)} = \Phi(i, j)^{(n)} + \frac{\omega}{4} \times \left[\Phi(i+1, j)^{(n)} + \Phi(i-1, j)^{(n+1)} + \Phi(i, j+1)^{(n+1)} + \Phi(i, j-1)^{(n)} - \Phi(i, j)^{(n)} \right],$$

где ω – параметр релаксации. При $\omega = 1$ получим метод Гаусса – Зейделя, при $\omega > 1$ – метод последовательной верхней релаксации, а при $\omega < 1$ – метод последовательной нижней релаксации. Далее используем метод Гаусса – Зейделя.

Положив потенциал во всех внутренних узлах (1–4) равным нулю ($\Phi_{ij} = 0$), с помощью уравнения (3.14) найдем «новые» значения в них за 10 итераций.

Первая итерация	(1/4)(0+0+10+0)=2.5 (1/4)(0+0+2.5+0)=0.625	(1/4)(0+2.5+10+0)=3.125 (1/4)(0+0.625+3.125+0)=0.9375
Вторая итерация	3.4375 1.09375	3.59375 1.171875
Третья итерация	3.671875 1.2109375	3.7109375 1.23046875
Четвертая итерация	3.73046875 1.240234375	3.740234375 1.2451171875
Пятая итерация	3.7451171875 1.24755859375	3.74755859375 1.248779296875
Шестая итерация	3.748779296875 1.2493896484375	3.7493896484375 1.24969482421875
Седьмая итерация	3.74969482421875 1.249847412109375	3.749847412109375 1.2499237060546875
Восьмая итерация	3.7499237060546875 1.24996185302734375	3.74996185302734375 1.249980926513671875
Девятая итерация	3.749980926513671875 1.2499904632568359375	3.7499904632568359375 1.24999523162841796875
Десятая итерация	3.74999523162841796875 1.249997615814208984375	3.749997615814208984375 1.2499988079071044921875

Видно, что с каждой итерацией значения потенциала в каждом узле постепенно сближаются, так как разность между ними уменьшается. Отметим (см. рисунок 3.4), что все расчеты

проводятся с числами, имеющими ограниченное число десятичных разрядов (на рассмотренном небольшом примере это не так критично). В результате этого появляется дополнительная погрешность округления, которая добавляется к погрешности, возникающей при конечно-разностной аппроксимации.

В данном случае значение потенциала в одном из внутренних узлов сразу же используется для отыскания потенциала в соседнем узле. Указанная процедура повторяется для каждого из узлов до тех пор, пока два следующих друг за другом приближения не совпадут с требуемой точностью (TOL). Для этого в конце каждой итерации необходимо выполнять проверку вида

$$\text{error} \leq \text{TOL},$$

где $\text{error} = \max\left(\left|\Phi_i^{(it)} - \Phi_i^{(it-1)}\right|\right) / \Phi_i^{(it)}$, $\text{TOL} = 10^{-m}$. Если условие выполняется, следует прекратить итерации, в противном случае необходимо продолжить вычисления. Параметр m позволяет контролировать точность вычислений (количество верных знаков после запятой). Поскольку итерационный процесс может расходиться или стагнировать, для предотвращения образования бесконечного цикла при программной реализации необходимо задавать максимальное количество итераций, при достижении которого итерационный процесс должен прерваться.

Рассмотрим другой подход к решению этой же задачи. Воспользовавшись уравнением (3.14), запишем систему уравнений для нахождения потенциалов во внутренних узлах:

$$\begin{aligned} 4\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 - 0\Phi_4 &= 10; \\ -\Phi_1 + 4\Phi_2 - 0 - \Phi_4 &= 10; \\ -\Phi_1 - 0\Phi_2 + 4\Phi_3 - \Phi_4 &= 0; \\ -0\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 + 4\Phi_4 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда в матричном виде получим

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \mathbf{Av} = \mathbf{b}.$$

Очевидно, что данная матрица является ленточной. Решив систему, например, с помощью метода исключения Гаусса, найдем

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,75 \\ 3,75 \\ 1,25 \\ 1,25 \end{pmatrix}.$$

Видно, что полученные решения близки. Первый вариант решения соответствует явной схеме, а второй – неявной.

3.3.2 Двухмерное уравнение Пуассона

Для общности изложения продемонстрируем на примере последовательность решения с использованием МКР двухмерного уравнения Пуассона.

Пример 3.2

Решить уравнение $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}$, $0 \leq x, y \leq 1$, и найти распределение потенциала в узлах сетки, показанной на рисунке 3.7.

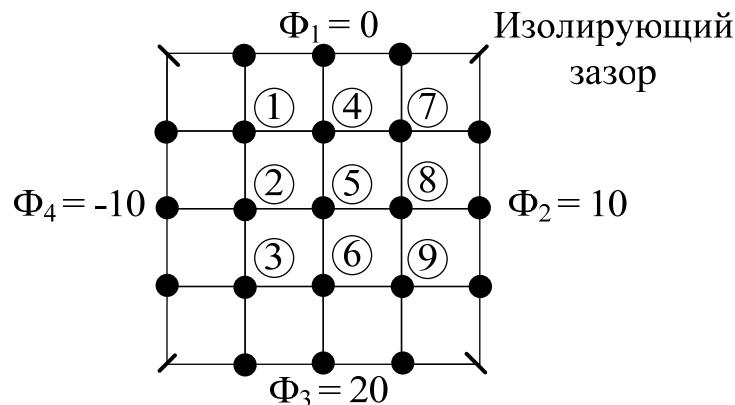


Рисунок 3.7 – Область решения для уравнения Пуассона

Решение

Положим $\rho_s = x(y - 1)$ и $\varepsilon_r = 1$, тогда

$$g(x, y) = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} = -\frac{x(y-1)10^{-9}}{10^{-9}/36\pi} = -36\pi x(y-1).$$

Используем метод последовательной релаксации.

Получим конечно-разностную аппроксимацию уравнения Пуассона (при $\Delta x = \Delta y = h$) для каждого узла сетки:

$$\begin{aligned} \Phi(i, j) = \\ = \frac{1}{4} \left[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) - h^2 g(i, j) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Тогда невязка для узла (i, j) по выражению (3.16) вычисляется как

$$\begin{aligned} R(i, j) = \Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \\ + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) - h^2 g(i, j) - 4\Phi(i, j). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Обозначим значение невязки на k -й итерации для узла (i, j) через $R^k(i, j)$. Это значение можно рассматривать как поправку к решению $\Phi(i, j)$ для приближения его к точному решению. Тогда по мере приближения $\Phi(i, j)$ к точному решению невязка $R(i, j)$ будет стремиться к нулю. Умножив невязку для узла (i, j) на ω и прибавив результат к $\Phi(i, j)$ на k -й итерации, получим $\Phi(i, j)$ на $k+1$ -й итерации:

$$\Phi^{k+1}(i, j) = \Phi^k(i, j) + \frac{\omega}{4} R^k(i, j)$$

или

$$\begin{aligned} \Phi^{k+1}(i, j) = \Phi^k(i, j) + \frac{\omega}{4} \left[\Phi^k(i+1, j) + \Phi^k(i-1, j) + \right. \\ \left. + \Phi^k(i, j+1) + \Phi^k(i, j-1) - h^2 g(i, j) - 4\Phi^k(i, j) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для использования уравнения (3.17) необходимо задание начального (в общем случае произвольного) приближения для каждого внутреннего узла. Оно может быть, например, нулевым или среднеарифметическим значением, полученным на основании граничных условий, т. е. $(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) / 4$. Оптимальное значение ω для прямоугольной области соответствует наименьшему корню квадратного уравнения

$$t^2 \omega^2 - 16\omega + 16 = 0,$$

где $t = \cos(\pi/nx) + \cos(\pi/ny)$; n_x и n_y – число интервалов, на которые разбита область решения по осям x и y соответственно.

Решение уравнения дает (наименьший корень)

$$\omega = \frac{8 - \sqrt{64 - 16t^2}}{t^2}.$$

Для останова итераций можно использовать среднюю суммарную невязку по всем внутренним узлам (1–9). Итерации продолжаются до достижения требуемой точности, задаваемой параметром TOL, или максимального числа итераций (MaxIter).

В таблице 3.2 приведены результаты вычислений (листинг 3.1) при $nx = ny = 4; 12; 20$, а также точное решение, полученное по аналитическим формулам из [32]. Из таблицы видно, что при уменьшении шага сетки h конечно-разностная аппроксимация дает более близкое к точному решение. При этом необходимо большее число итераций N_{it} для достижения требуемой точности.

Таблица 3.2 – Решение уравнения Пуассона для примера 3.2

Номер узла	$h = 1/4$ $\omega = 1.171$ $N_{it} = 10$	$h = 1/12$ $\omega = 1.589$ $N_{it} = 29$	$h = 1/20$ $\omega = 1.729$ $N_{it} = 46$	Точное решение [32]
1	-3.247	-3.409	-3.424	-3.429
2	-1.703	-1.982	-2.012	-2.029
3	4.306	4.279	4.280	4.277
4	0.039	-0.096	-0.109	-0.118
5	3.012	2.928	2.921	2.913
6	9.368	9.556	9.578	9.593
7	3.044	2.921	2.909	2.902
8	6.111	6.072	6.069	6.065
9	11.038	11.118	11.126	11.130

```
clear; clc;
weight=1; MaxIter=100; TOL=0.0001;
V1=0;V2=10;V3=20;V4=-10;
nx= 4; ny= nx; h = weight/nx;
V(1,2:nx)=V1;
V(ny+1,2:nx)=V3;
V(2:ny,1)=V4;
V(2:ny,nx+1)=V2;
V(2:nx,2:ny)=(V1 + V2 + V3 + V4)/4.0;
```

```

t = cos(pi/nx) + cos(pi/ny);
omega = ( 8 - sqrt(64 - 16*t^2))/(t^2);
disp(['SOR Factor Omega = ',num2str(omega)])
for Iter=1:MaxIter
    Rsum = 0;
    for num_row = 1:ny-1
        y = h*num_row;
        for num_col = 1:nx-1
            x = h*num_col;
            G = -36.0*pi*x*(y - 1.0);
R = omega/4*( V(num_row+2,num_col+1) + V(num_row,num_col+1) +
V(num_row+1,num_col+2) + V(num_row+1,num_col)-
4.0*V(num_row+1,num_col+1) - G*h*h);
            V(num_row+1,num_col+1) = V(num_row+1,num_col+1) + R;
            Rsum = Rsum + abs(R);
        end
    end
    if((Rsum/((nx-1)*(ny-1))) >= TOL)
        if(Iter == MaxIter)
disp(['Solution does not converge in ', num2str(Iter),' iterations'])
break;
        end
    else
disp(['Solution Converges in ',num2str(Iter),' iterations'])
disp(['h = ', num2str(h)])
break;
        end
    end
k=nx/4;
V(k+1:k:(3*k+1),k+1:k:(3*k+1))

```

Листинг 3.1 – Программный код для решения примера 3.2

3.4 Математическая модель вычисления емкостной матрицы многопроводной линии передачи

Рассмотренный в п. 3.3.1 пример решения двухмерного уравнения Лапласа характеризовался однородным диэлектрическим заполнением расчетной области. Далее рассмотрим случай слоистого диэлектрика. Подобная ситуация возникает при моделировании линий передачи, содержащих более одной диэлектрической среды. Поэтому необходимо соответствующим образом преобра-

зовать уравнение, описывающее распределение потенциала в пространстве, например уравнение (3.14), при использовании пятиточечного шаблона аппроксимации.

Рассмотрим микрополосковую линию (МПЛ) передачи. Слоистая среда состоит из двух диэлектриков с плоской границей раздела между ними. Простейший вариант такого заполнения, допускающий введение равномерной квадратной сетки, изображен на рисунке 3.8. Сетку построим так, чтобы границы части ячеек сетки совпали с границей раздела между диэлектриками. Шаг сетки равен h и отсчет номеров узлов ведется от узла в центре, которому присвоим индексы i, j .

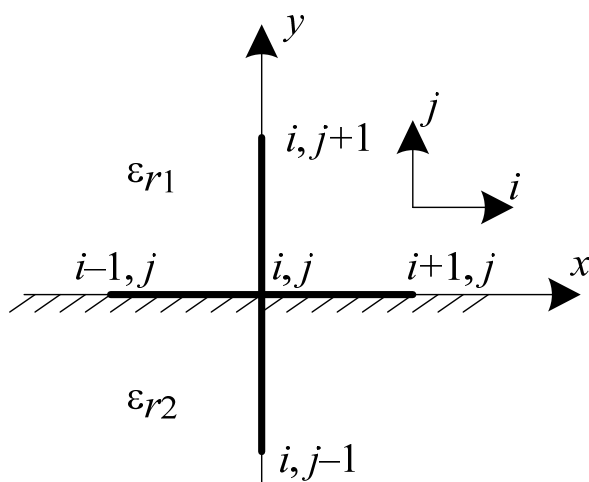


Рисунок 3.8 – Двухслойный диэлектрик

Запишем уравнение Лапласа при однородном заполнении: $\nabla^2\Phi = 0$. Чтобы ввести более общее уравнение, справедливое при неоднородном заполнении, обратимся к закону Гаусса в дифференциальной форме (электрические заряды могут концентрироваться только на поверхности проводника)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}.$$

Так как в пространстве вне проводников нет свободных зарядов, то $\rho = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, т. е. в двумерном случае для прямоугольных координат

$$\partial D_x / \partial x + \partial D_y / \partial y = 0.$$

Из этого уравнения вытекают конечно-разностные уравнения, связывающие поля по обе стороны от границ.

Поскольку $\mathbf{D} = -\varepsilon \nabla \Phi$, то в полупространстве над границей раздела, где $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}$, составляющая вектора индукции, параллельная координате y , имеет вид

$$\frac{\partial D y^{\text{над}}}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} (\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j))}{h},$$

а под границей, где $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2}$,

$$\frac{\partial D y^{\text{под}}}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} (\Phi(i, j) - \Phi(i, j-1))}{h}.$$

При записи этих выражений использовались правосторонняя и левосторонняя разности. Тогда скорость изменения составляющей электрической индукции, нормальной к границе, при переходе через границу раздела двух сред определяется как

$$\begin{aligned} \frac{\partial D y}{\partial y} &= \frac{\partial D y^{\text{под}}}{\partial y} - \frac{\partial D y^{\text{над}}}{\partial y} = \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{h} [\varepsilon_{r1} (\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)) - \varepsilon_{r2} (\Phi(i, j) - \Phi(i, j-1))]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Аналогичное выражение можно записать и для производной от составляющей Dx в направлении координаты x , однако пока не ясно, какое значение ε_r в данном случае использовать в узлах $i-1, j$ и $i+1, j$. Сначала положим $\varepsilon_r = \varepsilon_{r3}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial D x^{\text{пр}}}{\partial x} &= -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} (\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j))}{h}, \\ \frac{\partial D x^{\text{лев}}}{\partial x} &= -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} (\Phi(i, j) - \Phi(i-1, j))}{h}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial D x}{\partial x} &= \frac{\partial D x^{\text{лев}}}{\partial x} - \frac{\partial D x^{\text{пр}}}{\partial x} = \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3}}{h} [\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) - 2\Phi(i, j)]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Складывая выражения (3.18) и (3.19) и приравнявая результат к нулю, найдем значение потенциала в точках, расположенных на границах раздела:

$$\Phi(i, j) = \frac{\varepsilon_{r1}\Phi(i, j+1) + \varepsilon_{r2}\Phi(i, j-1) + \varepsilon_{r3}(\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j))}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2} + 2\varepsilon_{r3}}. \quad (3.20)$$

Еще раз отметим, что данное уравнение используется только для точек на границе, а выше или ниже ее – уравнение (3.14).

Перейдем к определению величины ε_{r3} , полагая, что вклад в величину $\Phi(i, j)$ узловых потенциалов $\Phi(i-1, j)$ и $\Phi(i+1, j)$ вдоль оси y одинаков, т. е.

$$\varepsilon_{r1}\Phi(i, j+1) + \varepsilon_{r2}\Phi(i, j-1) = \varepsilon_{r3}(\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j)),$$

тогда

$$\varepsilon_{r3} = \frac{\varepsilon_{r1}\Phi(i, j+1) + \varepsilon_{r2}\Phi(i, j-1)}{\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j)}. \quad (3.21)$$

Прежде чем при вычислениях использовать уравнение (3.20), необходимо на каждой итерации определять ε_{r3} по формуле (3.21). Выражение (3.21) можно упростить, если предположить, что в соседних узлах сетки значения потенциала отличаются незначительно, т. е. $\Phi(i, j+1) \approx \Phi(i, j-1)$, тогда

$$2\varepsilon_{r3} = \varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}.$$

Описанный метод основан на использовании закона Гаусса в дифференциальной форме. Рассмотрим подход, основанный на использовании закона Гаусса в интегральной форме. Согласно граничным условиям для нормальных составляющих электрического поля, если плотность поверхностных электрических зарядов равна нулю (что соответствует границе раздела диэлектрик-диэлектрик), то $D_{1n} = D_{2n}$. Таким образом, данное выражение справедливо, если

$$\oint_l \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_\Sigma = 0.$$

Подставив в это уравнение $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, получим

$$0 = \oint_l \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl,$$

где $\partial\Phi/\partial n$ – производная по направлению нормали к контуру l (рисунок 3.9), тогда

$$\begin{aligned}
0 = & \varepsilon_{r1}\varepsilon_0 \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{h} h + \\
& + \varepsilon_{r1}\varepsilon_0 \frac{\Phi(i-1, j) - \Phi(i, j)}{h} \frac{h}{2} + \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \frac{\Phi(i-1, j) - \Phi(i, j)}{h} \frac{h}{2} + \\
& + \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \frac{\Phi(i, j-1) - \Phi(i, j)}{h} h + \\
& + \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j)}{h} \frac{h}{2} + \varepsilon_{r1}\varepsilon_0 \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j)}{h} \frac{h}{2}.
\end{aligned}$$

После упрощений получим

$$\begin{aligned}
\Phi(i, j) = & \frac{\varepsilon_{r1}}{2(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \Phi(i, j+1) + \\
& + \frac{\varepsilon_{r2}}{2(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \Phi(i, j-1) + \frac{1}{4} \Phi(i-1, j) + \frac{1}{4} \Phi(i+1, j). \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Выражение (3.22) эквивалентно (3.20) при $2\varepsilon_{r3} = \varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}$, а при отсутствии границы диэлектрик-диэлектрик, т. е. $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$, оно эквивалентно (3.14).

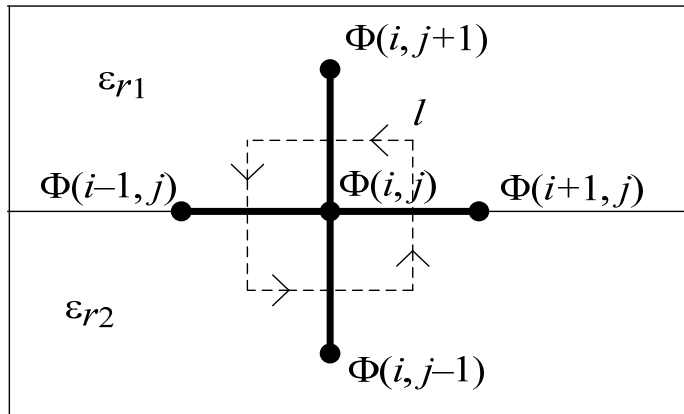


Рисунок 3.9 – Граница раздела диэлектрик-диэлектрик и контур интегрирования

Если в структуре больше границ диэлектрик-диэлектрик, например 4 (рисунок 3.10), используя аналогичный прием, получим

$$\begin{aligned}
\Phi(i, j) = & \frac{(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})\Phi(i, j+1) + (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r4})\Phi(i-1, j)}{2(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r4})} + \\
& + \frac{(\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r4})\Phi(i, j-1) + (\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3})\Phi(i+1, j)}{2(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r4})}.
\end{aligned}$$

Таким же образом можно вывести выражение для случая с большим числом диэлектрических границ.

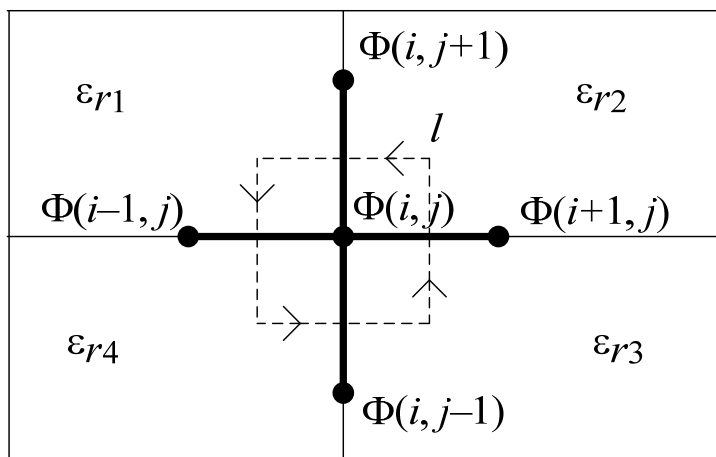


Рисунок 3.10 – Структура со слоистым диэлектриком

Оценим изменения в уравнениях при исследовании симметричных структур. Для примера на рисунке 3.11, *а* приведена экранированная двухполосковая линия передачи (shielded double-strip line with partial dielectric support [32]), а на рисунке 3.11, *б* показана ее часть, полученная с использованием полной симметрии.

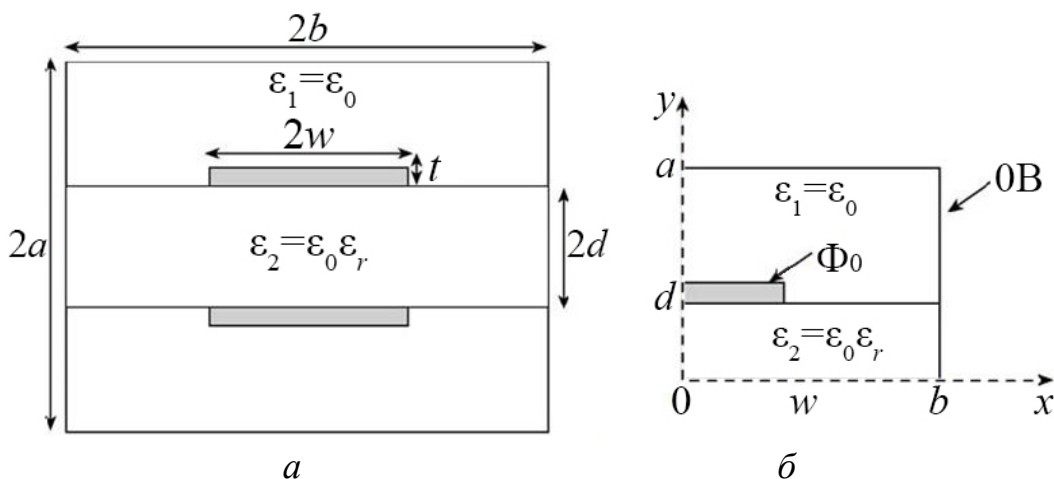


Рисунок 3.11 – Экранированная двухполосковая линия передачи (*а*) и ее вид при использовании полной симметрии (*б*)

На линии симметрии выполняется условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

Это означает, что на линии симметрии вдоль оси y ($x = 0$) производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2h} = 0$, откуда следует, что $\Phi(i+1, j) = \Phi(i-1, j)$. Тогда выражение (3.14) упрощается:

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4} [\Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) + 2\Phi(i+1, j)]. \quad (3.23)$$

На линии симметрии вдоль оси x ($y = 0$) имеем $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2h} = 0$, тогда $\Phi(i, j+1) = \Phi(i, j-1)$, а выражение (3.14) упрощается:

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4} [\Phi(i-1, j) + \Phi(i+1, j) + 2\Phi(i, j+1)] \quad (3.24)$$

Таким образом, для нахождения распределения потенциала в соответствующих узлах используются выражения (3.14), (3.22), (3.23) и (3.24).

Перейдем к определению погонной емкости. В общем случае емкость связана с величиной полного заряда в анализируемой структуре (системе) равенством

$$C = k \frac{q_{\Sigma}}{\Phi_0}, \quad (3.25)$$

где Φ_0 – потенциал между внутренним (центральным) и внешним проводниками (см. рисунок 3.11, б); k – коэффициент, необходимый для учета симметрии. В рассматриваемом случае он равен 4 (полная симметрия).

Для вычисления полного заряда воспользуемся законом Гаусса для контура l , охватывающего внутренний проводник. Выберем прямоугольный контур между двумя смежными прямоугольными границами, как показано на рисунке 3.12. Тогда

$$\begin{aligned} q_{\Sigma} = \oint_l \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl = \varepsilon \left(\frac{\Phi_P - \Phi_N}{\Delta x} \right) \Delta y + \varepsilon \left(\frac{\Phi_M - \Phi_L}{\Delta x} \right) \Delta y + \\ + \varepsilon \left(\frac{\Phi_H - \Phi_L}{\Delta y} \right) \Delta x + \varepsilon \left(\frac{\Phi_G - \Phi_K}{\Delta y} \right) \Delta x + \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Полагая $\Delta x = \Delta y = h$, получим

$$q_{\Sigma} = (\varepsilon\Phi_P + \varepsilon\Phi_M + \varepsilon\Phi_H + \varepsilon\Phi_G + \dots) - (\varepsilon\Phi_N + 2\varepsilon\Phi_L + \varepsilon\Phi_K + \dots).$$

Если узел расположен на границе диэлектрик-диэлектрик, то $\varepsilon_{ri} = (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})/2$. Если же он расположен на оси симметрии, то $\Phi = \Phi/2$, поскольку симметрия учтена в уравнении (3.25).

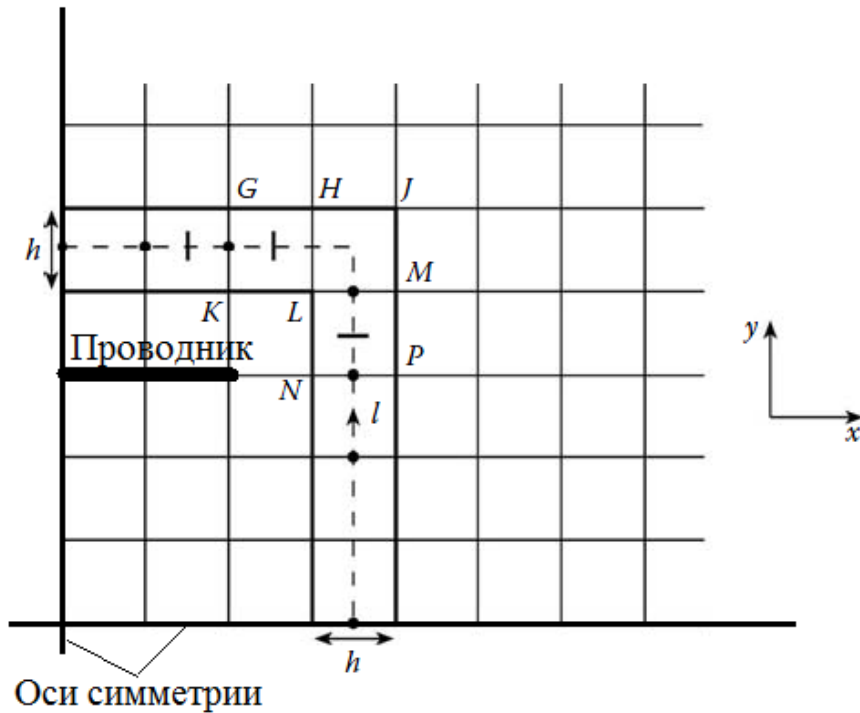


Рисунок 3.12 – Прямоугольный контур l , используемый для определения сосредоточенного заряда на поверхности проводника

Далее необходимо аналогично вычислить C_0 , удалив диэлектрические границы (положив для всех узлов $\varepsilon_{ri} = 1$). После этого можно вычислить волновое сопротивление по формуле (1.26).

Необходимо отметить, что при вычислениях часто проверяют сходимость не первичного параметра (потенциала) в узлах, а вторичного (емкость), для чего выполняется оценка

$$\text{error} = \max \left| \frac{C_{ij}^{(it)} - C_{ij}^{(it-1)}}{C_{ij}^{(it)}} \right| \leq \text{TOL}.$$

Используя равенство $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ для двумерного случая в виде

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{i}(\partial\Phi/\partial x) + \mathbf{j}(\partial\Phi/\partial y)),$$

можно определить напряженность с помощью вычисленных потенциалов. Так, вычислив потенциалы в узлах сетки и используя центральную конечно-разностную аппроксимацию, можно вычислить значения компонентов вектора напряженности, а затем суммарные значения (рисунок 3.13).

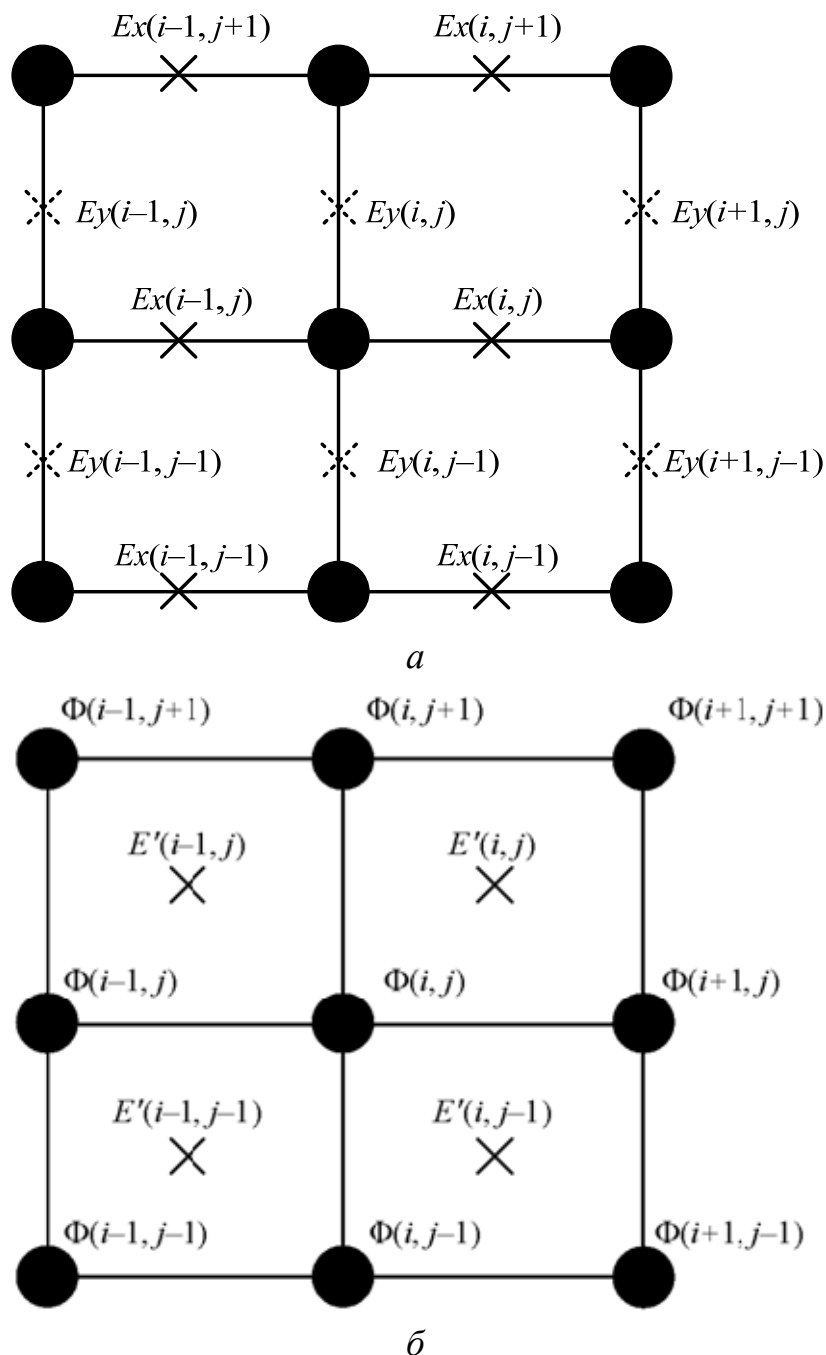


Рисунок 3.13 – Шаблон для вычисления компонентов вектора напряженности электрического поля: *a* – центральные разности вдоль осей *x* и *y* для вычисления индивидуальных компонентов вектора; *б* – узлы сетки для вычисления суммарных значений вектора напряженности

Так, компоненты вектора напряженности в соответствии с рисунком 3.13, *a* вычисляются по формулам

$$E_x(i, j) = -\frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j)}{h}, \quad E_y(i, j) = -\frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{h}.$$

Далее вычисляются суммарные значения вектора напряженности в узлах новой сетки (количество строк и столбцов этой сетки на единицу меньше количества строк и столбцов сетки для вычисления потенциалов, рисунок 3.13, *б*) как среднее арифметическое значение от индивидуальных значений компонентов вектора:

$$E'_x(i, j) = \frac{E_x(i, j+1) + E_x(i, j)}{2}, \quad E'_y(i, j) = \frac{E_y(i+1, j) + E_y(i, j)}{2}.$$

После вычисления значений компонентов вектора напряженности электрического поля можно воспользоваться процедурами Octave (`figure` и `quiver`) для наглядного представления полученных результатов.

3.5 0 нумерации узлов сетки

Еще раз рассмотрим уравнение Лапласа для функции Φ в области Ω с известными на границе Γ значениями. Пусть Ω – прямоугольник, а Γ – его граница. Пронумеруем только внутренние узлы, поскольку значения функции на границе известны. Точки разметим при движении по горизонтали и снизу вверх. Эта разметка называется естественным упорядочиванием (рисунок 3.14, *a*). Структура результирующей матрицы приведена на рисунке 3.14, *б*.

При такой нумерации узлов возникает зависимость в данных. Так, при вычислении $\Phi(i, j)$ требуются значения в соседних узлах как на текущей итерации, так и на предыдущей, что создает проблему для организации параллельных вычислений.

Рассмотрим другой подход к нумерации внутренних узлов, пригодный для параллельной реализации, который называется красно-черным упорядочиванием (рисунок 3.15). В этом случае на каждой итерации производится расчет значений функции сначала

в узлах одного цвета, затем в узлах другого цвета. Причем нумеруются сначала красные узлы, а затем черные.

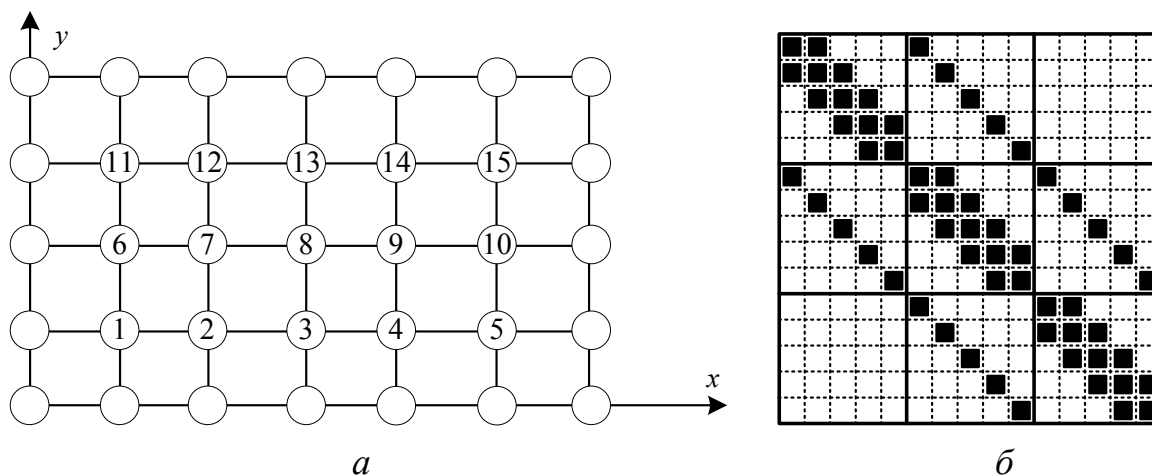


Рисунок 3.14 – Естественное упорядочивание неизвестных для сетки 7×5 (a) и соответствующая ей структура матрицы (б)

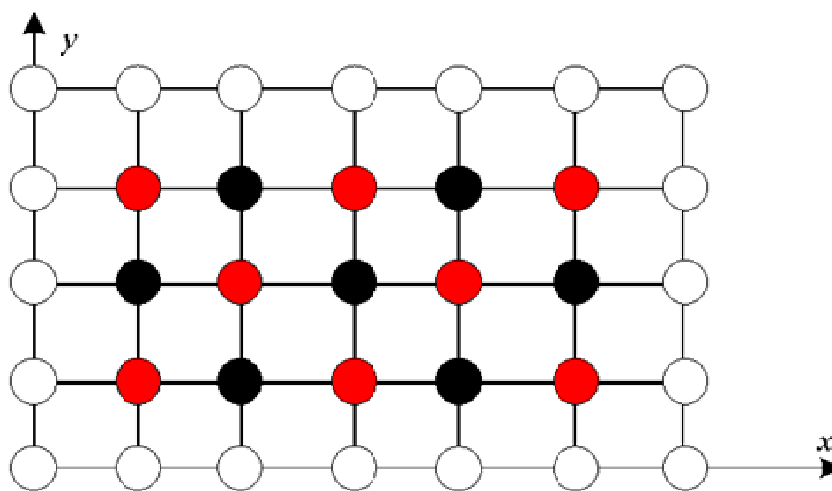


Рисунок 3.15 – Красно-черное упорядочивание неизвестных для сетки 7×5

Заметим, что смежны с каждым красным узлом лишь черные узлы. Поэтому, если вначале переычисляются компоненты из красных узлов, используются только старые значения из черных узлов. Когда переычисляются компоненты из черных узлов, которые смежны лишь с красными узлами, используются лишь новые значения из этих красных узлов. Можно сказать, что красно-черное упорядочивание обеспечивает перевод рекуррентных формул метода Зейделя в двухшаговое использование формул Якоби.

Контрольные вопросы и задания

1. Для решения каких уравнений используется метод конечных разностей?
2. Из каких компонентов состоит погрешность решения при использовании конечно-разностной аппроксимации?
3. Как можно повысить точность конечно-разностной аппроксимации?
4. Какой тип конечно-разностной аппроксимации характеризуется меньшей погрешностью?
5. В чем отличие явной и неявной конечно-разностных схем?
6. Для чего используется красно-черное упорядочивание в методе конечных разностей?
7. Разработать программу на языке Octave для решения задачи из примера 3.1.
8. Разработать программу на языке Octave для вычисления волнового сопротивления линии передачи, изображенной на рисунке 3.11.
9. Для линии передачи, изображенной на рисунке 3.11, разработать программу на языке Octave для вычисления значений компонентов вектора напряженности электрического поля и их отображения.
10. Разработать программу на языке Octave для вычисления емкости коаксиальной структуры, показанной на рисунке 3.16 ($a = b = 1$ см, $c = d = 2$ см).

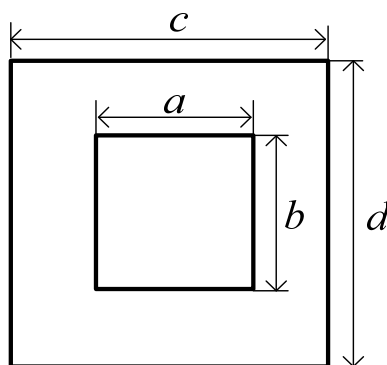


Рисунок 3.16 – Поперечное сечение коаксиальной структуры