



Электромагнитная совместимость:

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

С.П. Куксенко



5 МЕТОД МОМЕНТОВ

5.1 Общие сведения

Метод моментов (МоМ) – численный метод формирования матричных уравнений [36]. Для пояснения идеи метода рассмотрим обобщенную задачу (детерминированное уравнение)

$$Lf = g \text{ в области } \Omega, \quad (5.1)$$

где L – линейный оператор (дифференциальный, интегральный или интегро-дифференциальный); g – известная функция; f – искомая неизвестная функция. Область Ω представляет собой пространственную область, описываемую координатами. Функция f может быть как скалярной, так и векторной. Пусть f представлена линейной комбинацией N базисных функций f_n в области действия L , т. е.

$$f = \sum_{n=1}^N a_n f_n, \quad (5.2)$$

где a_n – неизвестные коэффициенты. Очевидно, что для приближенного решения (5.2) является конечной суммой, а для точного – бесконечной. Подставив выражение (5.2) в уравнение (5.1) и используя линейность L , получим

$$\sum_{n=1}^N a_n Lf_n \approx g. \quad (5.3)$$

Тогда невязка

$$R = g - \sum_{n=1}^N a_n Lf_n.$$

Базисные функции выбираются так, чтобы они моделировали ожидаемое поведение неизвестной функции по всей ее области, и они могут быть скалярными или векторными в зависимости от решаемой задачи. Если базисные функции определены на локальных областях, они называются локальными базисными функциями или базисными функциями подобластей. Если они определены на всей области, то их называют глобальными базисными функциями

или базисными функциями полной области. (Далее рассматриваются только локальные функции.)

В области определения L составим систему тестовых (весовых) функций w_m и зададим соответствующее скалярное произведение [37]. Так, для функций f и w оно задается в виде

$$(f, w) = \int f w dL,$$

где интеграл может быть линейным (как в рассматриваемом случае), поверхностным или объемным в зависимости от используемых функций.

Для точного решения требуется, чтобы невязка была равна нулю, а это соответствует равенству нулю скалярного произведения каждой тестовой функции и невязки, т. е.

$$(w_m, g) - \sum_{n=1}^N a_n (w_m, Lf_n) = 0 \text{ или } \sum_{n=1}^N a_n (w_m, Lf_n) = (w_m, g).$$

Это уравнение соответствует СЛАУ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ с матрицей порядка N , где элементы матрицы и правой части вычисляются соответственно как

$$a_{mn} = (w_m, Lf_n) \text{ и } b_m = (w_m, g).$$

При использовании того или иного численного метода важна скорость его сходимости и точность получаемых результатов. Сходимость МоМ напрямую зависит от оператора L , базисных f_n и тестовых w_m функций, а также их числа N . При этом эффективность применения метода для получения результата с заданной точностью определяется вычислительными затратами (времени и памяти используемой рабочей станции). При одновариантном анализе использование МоМ сводится к следующим этапам:

- получение из уравнений Максвелла интегрального уравнения для заданной структуры;
- построение сетки (разбиение границ структуры на N подобластей и аппроксимация искомой функции в каждой из них соответствующей базисной функцией);
- формирование СЛАУ (вычисление элементов матрицы порядка N и элементов правой части);

- решение сформированной СЛАУ;
- вычисление требуемых характеристик структуры из полученного решения СЛАУ.

Таким образом, суть метода заключается в том, что неизвестная величина (например, поле или плотность тока, зависящая от пространственных координат) аппроксимируется конечным рядом известных функций (называемых базисными), умноженных на неизвестные коэффициенты. Это приближение подставляется в линейное операторное уравнение. Левую и правую части полученного уравнения умножают на подходящую функцию (называемую тестовой или весовой функцией) и интегрируют по области, в которой определена тестовая функция. В результате линейное операторное уравнение сводится к линейному алгебраическому уравнению. Повторяя эту процедуру для набора независимых тестовых функций, число которых должно равняться числу базисных функций, получают СЛАУ. Решение СЛАУ дает неизвестные коэффициенты и позволяет найти приближенное решение операторного уравнения.

В версии МоМ, предложенной Харрингтоном, используются кусочно-постоянные (импульсные) функции в виде базисных и функции Дирака в виде тестовых. Она известна также как метод коллокаций. Харрингтон в работе [37] выполнил обобщение, позволяющее считать методы коллокаций, Галёркина и наименьших квадратов частным случаем МоМ. Однако в прикладной математике этот подход принято называть по-другому. Так, в 1956 г. Crandall предложил термин «метод взвешенных невязок» (МВН), обобщив под ним целое семейство методов [38]. Под невязкой уравнения $Lf = g$ подразумевается выражение

$$R = L(\underline{f} - f) = L\underline{f} - g,$$

где \underline{f} – функция, аппроксимирующая функцию f с помощью набора базисных функций. Далее накладывается условие ортогональности (взятие скалярного произведения) невязки всем тестовым функциям (в случае метода Галёркина – базисным функциям).

В таблице 5.1 приведены основные этапы становления МВН. Из таблицы видно, что в его развитие существенный вклад внесли отечественные ученые (рисунок 5.1) [22].

Таблица 5.1 – Основные этапы разработки метода взвешенных невязок

Год	Разработчик(и)	Метод
1915	Галёркин Б. Г.	Метод Галёркина (Бубнова – Галёркина ¹)
1921	Karman T. Pohlhausen E.	Интегральный метод (Кармана – Польгаузена)
1923	Biezeno C. B. Koch J. J.	Метод подобластей
1926	Крылов Н. М.	Метод наименьших квадратов
1926– 1932	Крылов Н. М. Кравчук М. Ф.	Метод моментов
1933	Канторович Л. В.	Метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям
1937	Канторович Л. В. и Frazer R. A. Jones W. P., Skan S. V.	Интерполяционный метод, метод коллокаций
1940	Репман Ю. В.	Обоснование метода Бубнова – Галёркина применительно к интегральным уравнениям типа Фредгольма
1940	Петров Г. И.	Обоснование метода Бубнова – Галёркина применительно к дифференциальным уравнениям
1942	Келдыш М. В.	Доказательство сходимости метода Бубнова – Галёркина для стационарных задач
1947	Yamada H.	Метод моментов
1948	Михлин С. Г.	Общий признак сходимости метода Бубнова – Галёркина
1949	Faedo S.	Доказательство сходимости метода Бубнова – Галёркина для нестационарных задач
1953	Green J. W.	Оценки сходимости и погрешности метода Бубнова – Галёркина для нестационарных задач
1956	Crandall S. H.	Обобщение методов, МВН

¹ Бубнов И.Г. предложил схожий метод (Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.). Поэтому в литературе метод Галёркина часто называют методом Бубнова – Галёркина.



Иван
Григорьевич
Бубнов



Борис
Григорьевич
Галёркин



Николай
Митрофанович
Крылов



Михаил
Филиппович
Кравчук



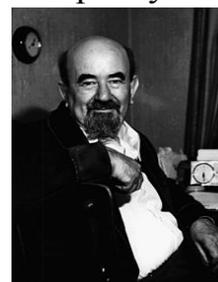
Мстислав
Всеволодович
Келдыш



Леонид
Витальевич
Канторович



Григорий
Иванович
Петров



Соломон
Григорьевич
Михлин

Рисунок 5.1 – Отечественные ученые,
внесшие существенный вклад в развитие МВН

Рассмотрим пример, демонстрирующий универсальность МоМ. Как было сказано, этот метод широко применим при решении интегральных уравнений. Однако он может использоваться и для решения дифференциальных уравнений.

Пример 5.1

Решить линейное дифференциальное уравнение первого рода вида

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \quad (5.4)$$

на интервале $[0, 1]$ с граничным условием $y(x = 0) = y_0$. Точное решение этого уравнение известно: $y(x) = y_0 e^x$.

Решение

Сначала используем метод Галёркина и полиномиальные базисные функции ($\varphi_j = x^j$)

$$y_G = y_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_j x^j. \quad (5.5)$$

Дифференциальный оператор $L = \frac{d}{dx} - 1$. Будем искать решение согласно формулировке уравнения (5.5)

$$Ly_G = \left(\frac{d}{dx} - 1 \right) \left(y_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_j x^j \right) = \sum_{j=1}^N (jx^{j-1} - x^j) \alpha_j - y_0 = 0. \quad (5.6)$$

Тестовые функции w_k выберем из того же семейства полиномиальных функций, что и базисные функции, но меньшего порядка. Тогда тестовые функции определим в виде $w_k = x^{k-1}$. Сформируем скалярное произведение $(Ly_G, w_k) = 0$. Поскольку

$$(u, v) = \iiint_D u v dx dy dz \text{ и в нашем случае } (Ly_G, w_k) = \int_0^1 Ly_G w_k dx, \text{ то}$$

$$\left(\sum_{j=1}^N (jx^{j-1} - x^j) \alpha_j - y_0, w_k \right) = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^N (jx^{j-1} - x^j) \alpha_j - y_0 \right) x^{k-1} dx = 0,$$

следовательно,

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \int_0^1 (jx^{j+k-2} - x^{j+k-1}) dx = \int_0^1 y_0 x^{k-1} dx, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Полученное равенство запишем в матрично-векторной форме

$$[S_{kj}] [\alpha_j] = [\beta_k], \quad (5.7)$$

где

$$S_{kj} = \int_0^1 (jx^{j+k-2} - x^{j+k-1}) dx = \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}; \quad (5.8)$$

$$\beta_k = \int_0^1 y_0 x^{k-1} dx = \frac{y_0}{k}.$$

Решим уравнение (5.7) при $y_0 = 1$ и $N = 1, 2, 3, 4, 5$. Интервал определения x $[0, 1]$ представим в дискретном виде: $x_d = 0, 0.25, \dots, 1$. При $N = 1$ получим $S_{11} = 1/2$, $\beta_1 = 1$, следовательно, $\alpha_1 = 2$. Тогда выражение (5.5) примет вид

$$y_G^{N=1} = y_0 + \sum_{j=1}^1 \alpha_1 x_d^1 = 1 + 2x_k.$$

Последовательно подставляя значения x_d в данное выражение, получим решение при $N = 1$

$$y_G^{N=1} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.50 \\ 2.00 \\ 2.50 \\ 3.00 \end{bmatrix}.$$

Выполняя аналогичные действия при $N = 2, 3, 4, 5$ (листинг 5.1), найдем значения y_G (таблица 5.2). Для сравнения в таблице 5.2 также приведено точное решение.

Далее рассмотрим решение уравнения (5.4) с помощью метода коллокаций (метод моментов с согласованием по точкам). В этом случае в качестве тестовых функций используются дельта-функции Дирака, т. е. $w_k = \delta(x - x_k)$. В виде базисных функций, как и ранее, используем полиномиальные функции $\varphi_j = x^j$. Разделим интервал $[0, 1]$ на N дискретов, что эквивалентно

$$x_k = \frac{k}{N+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Подставив базисные и тестовые функции в скалярное произведение $(L y_C, w_k)$, где $y_C = y_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_j x^j$, получим формулы для вычисления элементов матрицы и вектора сводных членов (правой части):

$$S_{kj} = \int_0^1 (jx^{j-1} - x^j) \delta(x - x_k) dx = \left(\frac{k}{N+1} \right)^{j-1} \left(j - \frac{k}{N+1} \right);$$

$$\beta_k = \int_0^1 y_0 \delta(x - x_k) dx = y_0.$$
(5.9)

Таблица 5.2 – Решение уравнения (5.4) методом Галёркина

x	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	Точное решение
0.00	1.00	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.25	1.50	1.267857	1.284331	1.284052	1.284024	1.284025
0.5	2.00	1.642857	1.647887	1.648716	1.648723	1.648721
0.75	2.50	2.125000	2.117077	2.116969	2.116999	2.117000
1.00	3.00	2.714286	2.718310	2.718282	2.718282	2.718282

```

clc; clear;
xh=0.25;
x=0:xh:1;
xn=1/xh+1;
y0=1; N=5;
for k=1:N
    for j=1:N
        s(k,j)=j/(j+k-1)-1/(j+k);
    end
    b(k)=y0/k;
end
a=s\b'
for n=1:xn
    solution(n)=y0;
    for j=1:N
        solution(n)=solution(n)+a(j)*x(n).^j;
    end
end
disp(solution)
    
```

Листинг 5.1 – Программный код для решения уравнения (5.4) методом Галёркина

Результаты использования метода коллокаций при $y_0 = 1$ и $N = 1, 2, 3, 4, 5$ сведены в таблицу 5.3 (листинг 5.2).

Таблица 5.3 – Решение уравнения (5.4) методом коллокаций

x	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	Точное решение
0.00	1.00	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.25	1.50	1.255682	1.286957	1.283803	1.284039	1.284025
0.5	2.00	1.613636	1.652174	1.648444	1.648739	1.648721
0.75	2.50	2.073864	2.121739	2.116651	2.117023	2.117000
1.00	3.00	2.636363	2.721739	2.717642	2.718300	2.718282

```

clc; clear;
xh=0.25;
x=0:xh:1;
xn=1/xh+1;
y0=1; N=5;
for k=1:N
    for j=1:N
        s(k,j)=(k/(N+1))^(j-1)*(j-k/(N+1));
    end
    b(k)=y0;
end
a=s\b'
for n=1:xn
    solution(n)=y0;
    for j=1:N
        solution(n)=solution(n)+a(j)*x(n).^j;
    end
end
disp(solution)

```

Листинг 5.2 – Программный код для решения уравнения (5.4) методом коллокаций

Название «метод моментов», по мнению некоторых авторов, является неудачным, поскольку оно имеет немного другое значение в современной прикладной математике [39]. Однако при решении задач электромагнетизма этот подход, как и прежде, называют МоМ. Харрингтон при выборе названия для использованного им метода позаимствовал его из [40]. Ранее метод с таким названием был предложен в [41, 42], где в качестве тестовых функций для решения интегральных уравнений использовались полиномы (моменты функции). При этом необходимо отметить, что Харрингтон в работе [37] под термином «метод моментов», по сути, подразумевал МВН, хотя и ограничивался лишь линейными электромагнитными задачами. Далее в этой работе использовано историческое название метода применительно к решению электромагнитных задач – МоМ.

Решение методом моментов электродинамических задач предусматривает следующие этапы. Сначала металлические части рассчитываемой структуры заменяются эквивалентными поверхностными электрическими токами, после чего решается задача

возбуждения окружающей среды этими токами. При этом среда может содержать магнито-диэлектрические слои сложной формы. После того как задача возбуждения решена, на полученное решение соответственно металлическим элементам накладываются граничные условия для вычисления эквивалентных токов. Важным аспектом процесса решения является разбиение металлических поверхностей на элементарные площадки и аппроксимация тока в пределах каждой такой площадки. Для аппроксимации криволинейных границ поверхностей произвольной формы принято использовать разбиение на треугольники, а для представления тока в них – базисные функции РВГ (RWG – Rao, Wilton, Glisson). Рассмотрению вычислительных аспектов МоМ посвящены, например, публикации [43, 44]. Он является наиболее часто используемым при моделировании задач ЭМС.

В качестве небольших и наглядных примеров, демонстрирующих простоту и элегантность метода моментов, рассмотрим электростатические задачи расчета распределения заряда. Напомним, что электрический потенциал φ в точке наблюдения \mathbf{r} , обусловленный объемной плотностью электрического заряда ρ , задается интегралом

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (5.10)$$

Если в точке источника \mathbf{r}' известна плотность электрического заряда $\rho(\mathbf{r}')$, то в любой точке наблюдения можно найти соответствующий потенциал, и наоборот, зная потенциал, можно определить соответствующую плотность заряда.

5.2 Примеры решения электростатических задач

5.2.1 Тонкая проволока

Рассмотрим тонкую проводящую проволоку (thin wire) длиной L и диаметром $2a$, ориентированную вдоль оси x (рисунок 5.2). Если радиус проволоки намного меньше ее длины, выражение (5.10) упрощается:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_0^L \frac{\tau(x')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx', \quad (5.11)$$

где

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

τ – линейная плотность заряда.

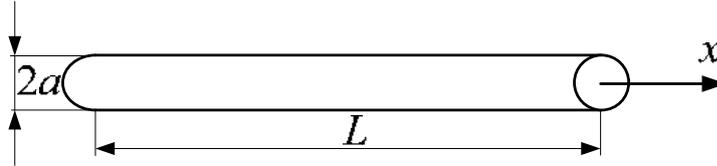


Рисунок 5.2 – Тонкая проволока

При такой постановке задача сводится к решению интегрального уравнения. Перейдем к ее приближенному решению. Для этого сегментируем проволоку на N подынтервалов длиной h каждый (рисунок 5.3). Нам потребуется $N + 1$ узлов с координатами

$$x_n = (n - 1)h \text{ при } h = L / N \text{ и } n = 1, 2, \dots, N + 1.$$

Тогда n -й подынтервал будет расположен между узлами x_n и x_{n+1} .

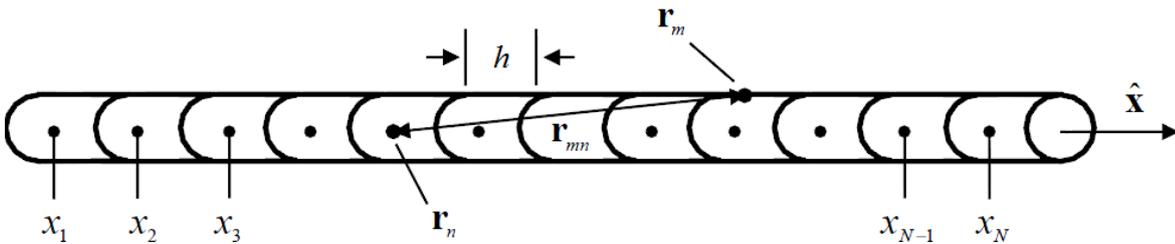


Рисунок 5.3 – Сегментация тонкой проволоки

С помощью кусочно-постоянных базисных функций в каждом подынтервале положим, что плотность заряда имеет постоянное значение, т. е. $\tau(x')$ кусочно-постоянна по длине проволоки. Математически это записывается как

$$\tau(x') = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(x'), \quad (5.12)$$

где α_n – неизвестные коэффициенты (которые надо вычислить); $f_n(x')$ – импульсная функция, имеющая постоянное значение на подынтервале и равная нулю вне его, т. е.

$$f_n(x') = \begin{cases} 0, & x' < (n-1)h \\ 1, & (n-1)h \leq x' \leq nh \\ 0, & x' > nh \end{cases} . \quad (5.13)$$

Подставляя выражения (5.13) в уравнение (5.11), получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(x') \frac{1}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' . \quad (5.14)$$

Используя определение импульсной функции (5.13), перепишем выражение (5.14) в виде

$$4\pi\epsilon\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_{(n-1)h}^{nh} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' \quad (5.15)$$

или более наглядно

$$4\pi\epsilon\varphi(\mathbf{r}) = \alpha_1 \int_0^h \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' + \alpha_2 \int_h^{2h} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' + \dots + \alpha_N \int_{(N-1)h}^L \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' ,$$

что дает одно уравнение с N неизвестными, а именно $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Но чтобы получить единственное решение, требуется N уравнений или допущений (ограничений). Строго говоря, эти уравнения должны быть линейно независимы. Сопоставим граничное условие (потенциал на проводе) в N точках с координатами x_m вдоль провода. Этот процесс называется коллокацией или согласованием по точкам. Ему соответствует процесс аппроксимации с помощью так называемых тестовых или весовых функций. В данном случае это дельта-функции Дирака¹. Для удобства, но без потери общности выберем в качестве координат N точек коллокации середины подынтервалов:

¹ Обобщенная функция, позволяющая записать точечное воздействие, а также пространственную плотность физических величин (масса, заряд и др.), сосредоточенных или приложенных в одной точке.

$$x_m = (m - 1/2)h, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда уравнение (5.15) для каждой из N точек даст систему из N уравнений. Таким образом, получим сумму интегралов, каждый из которых определен на соответствующем подынтервале. Для исключения сингулярности в подынтегральном выражении, возникающей из-за $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ точки наблюдения (поля) расположим на поверхности проволоки. Тогда знаменатель подынтегральной функции преобразуется к виду

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + a^2} \quad (5.16)$$

и уравнение (5.15) может быть переписано:

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon\varphi(x_1) &= \alpha_1 \int_0^h \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + a^2}} dx' + \dots + \alpha_N \int_{(N-1)h}^{Nh} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x')^2 + a^2}} dx', \\ &\vdots \\ 4\pi\epsilon\varphi(x_N) &= \alpha_1 \int_0^h \frac{1}{\sqrt{(x_N - x')^2 + a^2}} dx' + \dots + \alpha_N \int_{(N-1)h}^{Nh} \frac{1}{\sqrt{(x_N - x')^2 + a^2}} dx', \end{aligned} \quad (5.17)$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Элементы матрицы вычисляются как

$$z_{mn} = \int_{(n-1)h}^{nh} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x')^2 + a^2}} dx', \quad (5.19)$$

а элементы правой части –

$$b_m = 4\pi\epsilon\varphi(x_m). \quad (5.20)$$

Интеграл в выражении (5.19) можно представить в виде конечных комбинаций элементарных функций

$$z_{mn} = \log \left[\frac{(x_b - x_m) + \sqrt{(x_b - x_m)^2 - a^2}}{(x_a - x_m) + \sqrt{(x_a - x_m)^2 - a^2}} \right], \quad (5.21)$$

где $x_b = nh$; $x_a = (n-1)h$. Линейная геометрия рассматриваемой задачи (при $M = N$) приводит к тому, что матрица \mathbf{Z} является Трилинейной матрицей, т. е. имеет вид

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_N \\ z_2 & z_1 & z_2 & \dots & z_{N-1} \\ z_3 & z_2 & z_1 & \dots & z_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_N & z_{N-1} & z_{N-2} & \dots & z_1 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

На рисунке 5.4 приведено искомое распределение заряда по поверхности проволоки (листинг 5.3) при $N = 10$ и 100 (для решения СЛАУ использовалось обращение матрицы). Видно, что увеличение числа базисных функций повышает точность аппроксимации. Как следует из рисунка, заряд накапливается на краях проволоки.

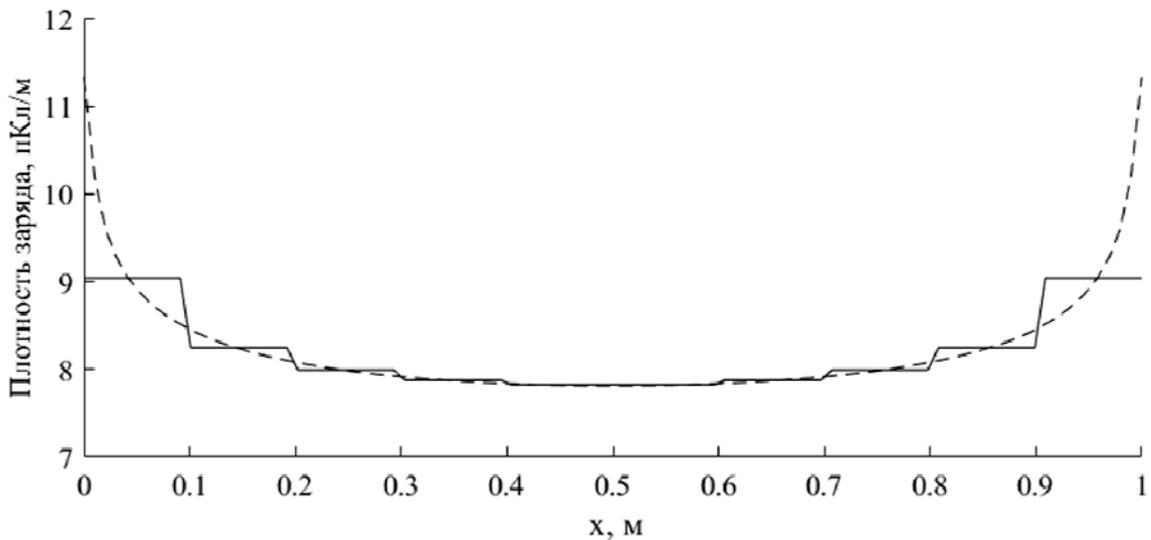


Рисунок 5.4 – Распределение заряда по поверхности тонкой проволоки при $N = 10$ (—) и 100 (---)

```
clear; clc;
set(0,'DefaultAxesFontSize',14,'DefaultAxesFontName','Times New Roman');
N=100;
```

```

L=1;
a=0.00125;
Nx=100;
bf=10;
delta=L/bf;
x=delta/2:delta:L;
for n=1:bf
    xb=n*delta;
    xa=(n-1)*delta;
    for m=1:bf
        arg1=((xb-x(m))+sqrt((xb-x(m)).^2-a^2))
        arg2=((xa-x(m))+sqrt((xa-x(m)).^2-a^2))
        Z(m,n)=log(arg1/arg2);
    end
end
m=1:bf;
b(m)=4*pi*8.85e-12;
sol=Z\b';
m=1:Nx;
h=L/bf;
xh=0:h:L
x=0:L/(Nx-1):L;
yr=0;
for n=1:bf
    basic_func{n}=1.*((x(m)>=xh(n))&(x(m)<=xh(n+1)))+0.*(x(m)>xh(n));
    yr=yr+sol(n)*basic_func{n};
end
ylabel('Плотность заряда (нКл/м)','fontsize',14);
xlabel('Длина, м')
plot(x,yr*1e+12,'k');

```

Листинг 5.3 – Программный код для вычисления распределения заряда по поверхности тонкой проволоки

На основании полученных результатов сделаем несколько выводов.

– Замена поверхностной плотности заряда на линейную позволила существенно уменьшить вычислительную сложность задачи.

– В процессе коллокации граничные условия были точно соблюдены только в N дискретных точках. Между этими точками потенциал отклоняется от указанного (постоянного) значения.

Чтобы снизить влияние данной особенности, необходимо уменьшать длину подынтервалов.

– Выбранные кусочно-постоянные базисные функции оканчиваются на краях подынтервалов. Поскольку аппроксимируется непрерывный заряд, использование этих базисных функций в целом дает нефизичные результаты. Это видно из рисунка 5.4 при $N = 10$. Следует помнить, что полученное решение является приближенным. Для повышения его точности необходимо увеличивать число базисных функций (уменьшать длину подынтервалов).

5.2.2 Тонкая пластина

Рассмотрим бесконечно тонкую ($z = 0$) квадратную проводящую пластину размером $L \times L$ (рисунок 5.5). В этом случае электростатический потенциал связан с поверхностной плотностью заряда соотношением

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sigma(x', y')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy'. \quad (5.23)$$

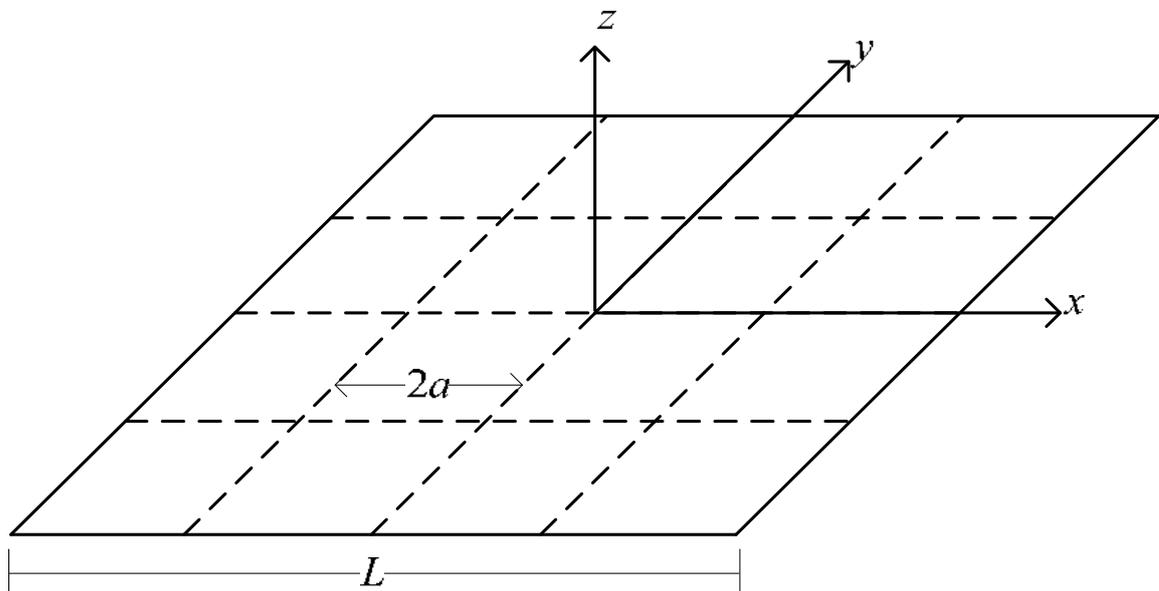


Рисунок 5.5 – Тонкая квадратная пластина

Зафиксируем на пластине потенциал 1 В. Тогда уравнение (5.23) преобразуется к виду

$$1 = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sigma(x', y')}{4\pi\epsilon\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy'. \quad (5.24)$$

Разобьем пластину на N квадратных площадок со сторонами $2a$ (площадь $\Delta = 4a^2$) и положим, что на каждой из них заряд имеет постоянное значение. Далее выберем N независимых точек наблюдения, расположенных в центрах (x_m, y_m) площадок. Элементы матрицы СЛАУ при этом вычисляются как

$$z_{mn} = \int_{S_n} \frac{1}{4\pi\epsilon\sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2}} dx' dy', \quad (5.25)$$

где S_n – площадь n -й площадки, а элементы правой части $b_m = 1$.

Когда точки источника и наблюдения поля совпадают ($m = n$), подынтегральная функция становится сингулярной, поэтому интеграл должен вычисляться аналитически. С учетом постоянства заряда на поверхности каждой площадки диагональные элементы матрицы вычисляются как

$$z_{mm} = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{1}{4\pi\epsilon\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} dx' dy'. \quad (5.26)$$

Раскрыв внутренний интеграл, получим

$$z_{mm} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-a}^a \log \left[\frac{\sqrt{a^2 + (y')^2} + a}{\sqrt{a^2 + (y')^2} - a} dy' \right]. \quad (5.27)$$

Раскрыв внешний интеграл, получим

$$z_{mm} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(2a \log \left[y + \sqrt{a^2 + (y')^2} \right] + \right. \\ \left. + y \log \left[\frac{y^2 + 2a(a + \sqrt{a^2 + (y')^2})}{y^2} \right] \right) \Bigg|_{-a}^a,$$

после упрощений

$$z_{mm} = \frac{2a}{\pi\epsilon} \log(1 + \sqrt{2}). \quad (5.28)$$

Элементы, расположенные вне главной диагонали ($m \neq n$) матрицы, могут быть вычислены с помощью простой аппроксимации по формуле

$$z_{mn} \approx \frac{\Delta}{4\pi\epsilon r_{mn}} = \frac{a^2}{\pi\epsilon\sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}}, \quad (5.29)$$

где x_n и y_n – координаты центра n -й площадки источника. Эта аппроксимация обладает весьма существенной погрешностью при вычислении элементов матрицы, соответствующих близко расположенным площадкам. Для повышения точности требуется или получение аналитических выражений, или использование методов численного интегрирования. В результате получается СЛАУ вида (5.18).

На рисунке 5.6 показана вычисленная поверхностная плотность заряда (листинг 5.4) на пластине при $N = 225$ (по 15 площадок по осям x и y) и $N = 1225$ (по 35 площадок). Для решения СЛАУ использовалось обращение матрицы. Видно, что, как и в случае с проволокой, заряд накапливается на краях пластины. Поэтому для повышения точности необходимо применять более частую сегментацию.

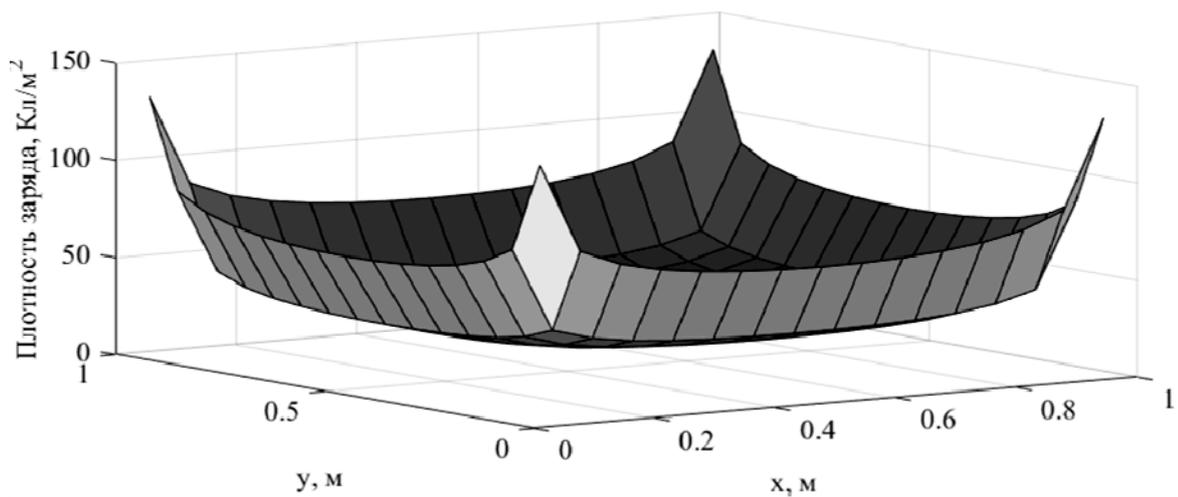
При известной поверхностной плотности заряда на пластине емкость вычисляется по формуле

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{V} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma(x', y') dx' dy' \approx \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \alpha_n \Delta. \quad (5.30)$$

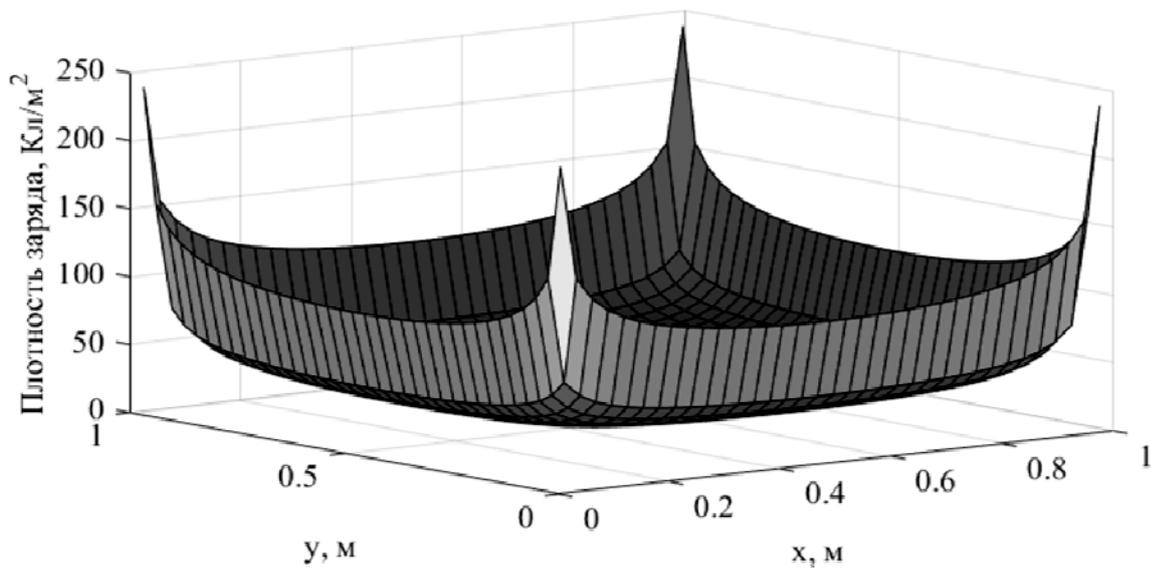
Как следует из таблицы 5.4, при увеличении N значения емкости сходятся к определенной величине.

Таблица 5.4 – Емкость квадратной пластины при изменении N

N	4	9	16	25	36	100	225	625	1225
C , пФ	35.70	37.37	38.24	38.77	39.12	39.83	40.18	40.45	40.57



a



б

Рисунок 5.6 – Распределение заряда на квадратной пластине при $N = 225$ (*a*) и 1225 (*б*)

```
clear;clc;
L=1;V=1;
eps0=8.854e-12;
patch_x=15;
patch_y=patch_x
N=patch_x*patch_y;
la=L/patch_x;
a=la/2;
xc1=la/2:la:L;
yc1=xc1;
xc2=-L/2+la/2:la:L/2;
yc2=xc2;
[X,Y]=meshgrid(xc1,yc1);
c=1;
```

```

for i=0:patch_x-1
    for j=0:patch_x-1
        xc(c)=la/2+j*la;
        yc(c)=la/2+i*la;
        c=c+1;
    end
end
for m=1:N;
    for n=1:N
        if m==n
            Z(m,m)=2*a*log(1+sqrt(2))/(pi*eps0);
        else
            Z(m,n)=(a*a)/(pi*eps0)/sqrt((xc(m)-xc(n))^2+(yc(m)-yc(n))^2);
        end
    end
    b(m)=V;
end
sol=inv(Z)*b';
j=1;
for i=1:patch_x
    SOL(1:patch_x,i)=sol(j:i*patch_x,1);
    j=j+patch_x;
end
SOL=SOL/1e-12;
surf(X,flipr(Y),SOL)
xlabel('Плотность заряда, Кл/м^2','fontsize',16);
ylabel('Длина, м','fontsize',16);
Q=sum(sol);
Q=Q*4*a*a

```

Листинг 5.4 – Программный код для вычисления распределения заряда по поверхности тонкой пластины и ее емкости

5.2.3 Плоский конденсатор

Рассмотрим плоский конденсатор, состоящий из двух квадратных пластин, расположенных одна над другой на расстоянии H (рисунок 5.7). Пусть разница потенциалов между пластинами равна 1 В (на верхней пластине +0.5 В, а на нижней – минус 0.5 В). Найдем распределение заряда на конденсаторе и его емкость. Для этого разобьем верхнюю и нижнюю пластины на N площадок.

Таким образом, число неизвестных составит $2N$, а матрица будет иметь блочную структуру:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{BB} & \mathbf{Z}^{BH} \\ \mathbf{Z}^{HB} & \mathbf{Z}^{HH} \end{pmatrix},$$

где индексы «в» и «н» обозначают верхнюю и нижнюю пластины соответственно. Диагональные блоки $N \times N$ (\mathbf{Z}^{BB} и \mathbf{Z}^{HH}) соответствуют матрицам, вычисленным для одной пластины. Из-за симметрии рассматриваемой геометрии элементы этих блоков равны между собой, т. е. $\mathbf{Z}^{BB} = \mathbf{Z}^{HH}$, и вычисляются по формулам (5.28) и (5.29). Внедиагональные блоки (\mathbf{Z}^{BH} и \mathbf{Z}^{HB}) также равны между собой и соответствуют площадкам пластина-пластина.

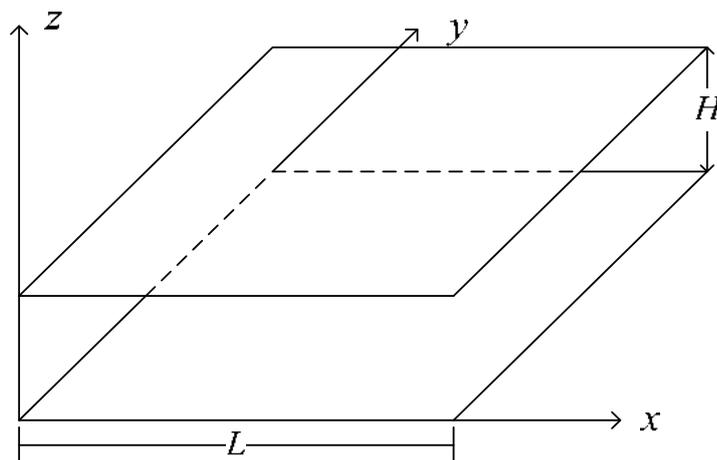


Рисунок 5.7 – Общий вид плоского конденсатора

Диагональные элементы блоков \mathbf{Z}^{BH} и \mathbf{Z}^{HB} с учетом изменений по координате z вычисляются аналогично внедиагональным элементам \mathbf{Z}^{BB} и \mathbf{Z}^{HH} :

$$z_{mn}^{BH} = \frac{a^2}{\pi \epsilon \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + H^2}}. \quad (5.31)$$

Внедиагональные элементы вычисляются как

$$z_{mn}^{BH} = \frac{0,564a}{\epsilon} \left[\sqrt{1 + \frac{\pi}{4} \left(\frac{H}{a} \right)^2} - \frac{H}{2a} \sqrt{\pi} \right]. \quad (5.32)$$

Правая часть СЛАУ также имеет блочную структуру:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^B \\ \mathbf{b}^H \end{bmatrix}.$$

При этом $b_m^B = 0.5$, $b_m^H = -0.5$ и $b_m^H = -b_m^B$. Таким образом, результирующая СЛАУ имеет блочный вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{BB} & \mathbf{Z}^{BH} \\ \mathbf{Z}^{BH} & \mathbf{Z}^{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^B \\ \boldsymbol{\alpha}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^B \\ -\mathbf{b}^B \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Задача может быть еще упрощена за счет использования симметрии структуры. Поскольку $\boldsymbol{\alpha}$ соответствует плотности заряда на обеих пластинах, а их размеры одинаковы и на них одинаковый и противоположный по знаку потенциал, то $\boldsymbol{\alpha}^B = -\boldsymbol{\alpha}^H$. Тогда уравнение (5.33) можно упростить:

$$\left[\mathbf{Z}^{BB} - \mathbf{Z}^{BH} \right] \boldsymbol{\alpha}^B = \mathbf{b}^B. \quad (5.34)$$

Решив данную систему уравнений, получим плотность заряда. Далее найдем емкость конденсатора. Для этого воспользуемся формулой

$$C = \frac{Q_B}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\text{верхняя пластина}} \alpha_n^B \Delta = 4a^2 \sum_{\text{верхняя пластина}} \alpha_n^B. \quad (5.35)$$

В таблице 5.5 приведены результаты вычисления емкости конденсатора (листинг 5.5) при изменении N . Видно, что значения емкости сходятся к определенной величине. На рисунке 5.8 показано распределение поверхностной плотности заряда при $N = 512$.

Таблица 5.5 – Емкость плоского конденсатора при учащении сегментации

N	8	32	128	512	2048	8192	32768
C , пФ	25.12	27.27	28.45	29.06	29.35	29.47	29.55

```
clear; clc;
set(0,'DefaultAxesFontSize',14,'DefaultAxesFontName','Times New Roman');
L=1;H=1;V=1;
```

```

eps=8.854e-12;
patch_x=32;
patch_y=patch_x;
N=patch_x*patch_y;
N=N*2; la=L/patch_x;
a=la/2; xc1=la/2:la:L;
yc1=xc1;zc1(size(yc1))=0;
zc2=zc1;zc2(:)=H;
xc_surf=0:L/(patch_x-1):L;
yc_surf=xc_surf;
[X,Y]=meshgrid(xc_surf,yc_surf);
c=1;
for i=0:patch_x-1
    for j=0:patch_x-1
        xc(c)=la/2+j*la;
        yc(c)=la/2+i*la;
        zc(c)=0;
        c=c+1;
    end
end
z=zeros(size(xc));
z(:)=H;
zc=[zc,z];
xc=[xc,xc];
yc=[yc,yc];
for m=1:N/2;
    for n=1:N/2
        if m==n
            Z(m,m)=la*log(1+sqrt(2))/(pi*eps);
        else
            Z(m,n)=(la*la)/(4*pi*eps)/sqrt((xc(m)-xc(n))^2+(yc(m)-yc(n))^2);
        end
    end
    b(m)=0.5;
end
for m=N/2+1:N;
    for n=1:N/2
        if m==n
            Z(m,m)=0.564*la/eps*(sqrt(1+pi*(H/la)^2)/4-H*sqrt(pi)/(2*la));
        else
            Z(m,n)=(la*la)/(4*pi*eps)/sqrt((xc(m)-xc(n))^2+(yc(m)-
yc(n))^2+H^2);
        end
    end
end

```

```

end
sol=inv(Z(1:N/2,1:N/2)-Z(N/2+1:N,1:N/2))*b';
sol=[sol;-sol];
j=1;
for i=1:patch_x
    SOL(1:patch_x,i)=sol(j:i*patch_x,1);
    j=j+patch_x;
end
j=1;
for i=1:patch_x
    SOL2(1:patch_x,i)=sol(patch_x*patch_x+j:patch_x*patch_x+i*patch_x,1);
    j=j+patch_x;
end
SOL=SOL/1e-12;
SOL2=SOL2/1e-12;
surf(X,Y,SOL)
hold on;
surf(X,Y,SOL2)
hold off;
xlabel('Плотность заряда, нКл/м^2','fontsize',14);
ylabel('Длина, м','fontsize',14);
zlabel('Длина, м','fontsize',14);
Q = sum(abs(sol(1:N/2))*la*la);
disp(Q/V)

```

Листинг 5.5 – Программный код для вычисления распределения заряда по поверхности плоского конденстора и его емкости

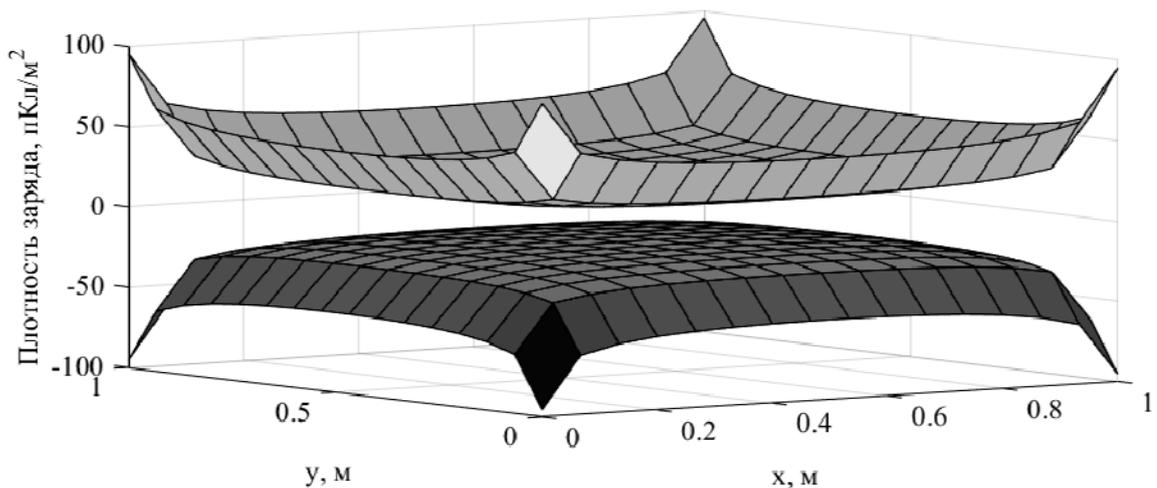


Рисунок 5.8 – Распределение заряда на плоском конденсаторе при $N = 512$

5.3 Базисные и тестовые функции

Эффективность МоМ во многом зависит от выбора ячеек и базисных и тестовых (пробных, весовых) функций, что определяется формой всей проводящей поверхности. Если поверхность (или совокупность поверхностей) имеет форму многоугольника с прямыми углами, целесообразно использовать ячейки прямоугольной формы с размерами $h_x \times h_y$. Поскольку базисные и тестовые функции по сути идентичны, то дальше речь пойдет только о первых. При этом системы базисных функций делятся на два вида: функции подобластей и функции полной области. Ниже на одномерном примере рассмотрим наиболее часто используемые базисные и тестовые функции.

Простейшие базисные функции имеют постоянное значение в ячейке и равны нулю вне ее. Они называются кусочно-постоянными (КПБФ) или импульсными (pulse functions) (рисунок 5.9). При этом интересующий интервал делится на N подынтервалов. На рисунке 5.9 подынтервалы имеют одинаковую длину, но это условие не является обязательным. На рисунке 5.9 приведен пример использования КПБФ, задаваемых как

$$f_m(x) = \begin{cases} 1, & x_m \leq x \leq x_{m+1}, \quad m = 1, \dots, N; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

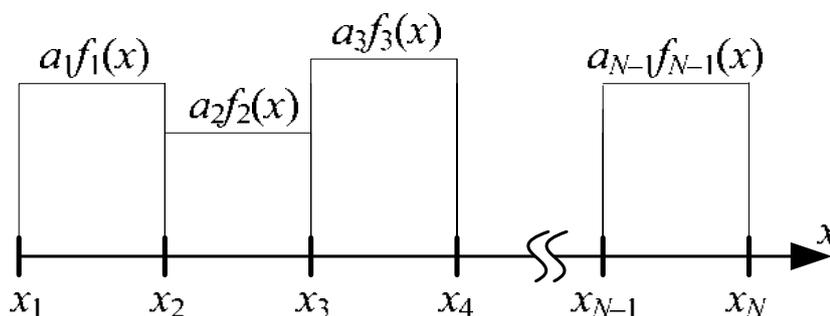


Рисунок 5.9 – Кусочно-постоянные базисные функции

На рисунке 5.10 показан результат использования КПБФ для аппроксимации функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2}} \quad (5.36)$$

на интервале $[0, 1.5]$ (листинг 5.6).

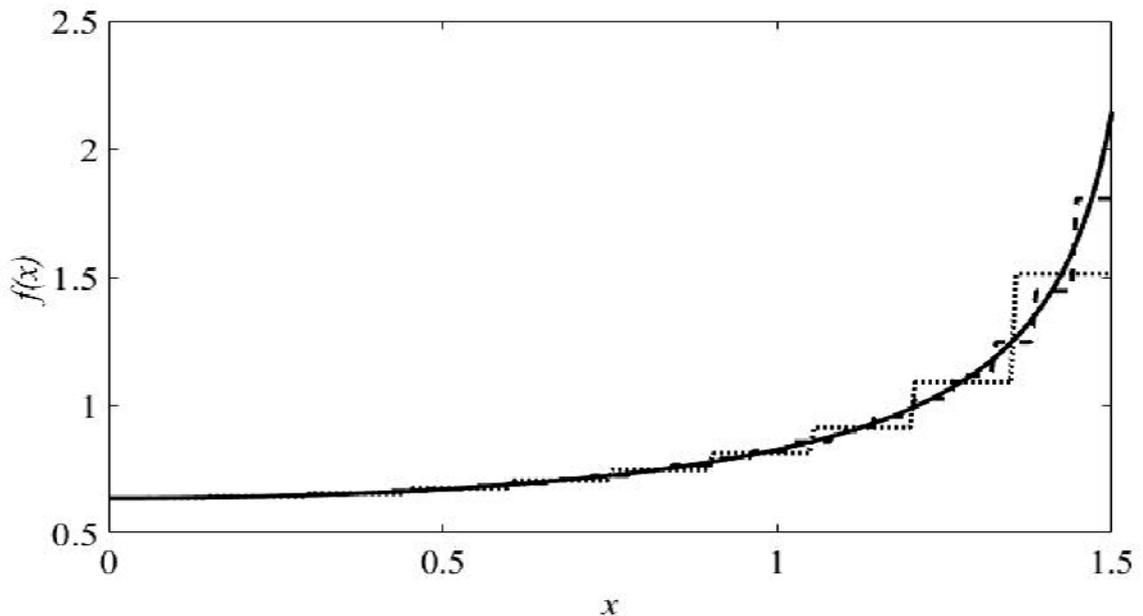


Рисунок 5.10 – Аппроксимация функции (5.36) (—) при использовании $N = 10$ (.....) и 25 (- -) КПБФ

```

clc; clear;
xstart=0;
xend=1.5;
N=10;
h=(xend-xstart)/N;
Nx=200;
hx=(xend-xstart)/(Nx-1);
x=0:hx:xend;
Y0 = 1./sqrt((pi/2).^2-x.^2);
xh=xstart:h:xend;
xc=h/2:h:xend;
yr=0;
m=1:Nx;
for n=1:N
    bf{n}=1.*((x(m)>=xh(n))&(x(m)<=xh(n+1)))+0.*(x(m)>xh(n));
    koef=1./sqrt((pi/2).^2-xc(n).^2);
    yr=yr+koef*bf{n};
end

```

```

hL=plot(x,yr,'g',x,Y0)
xlabel('x')
ylabel('f(x)')

```

Листинг 5.6 – Программный код для кусочно-постоянной аппроксимации функции (5.36)

Недостатком применения КПБФ является то, что получаемая аппроксимирующая функция разрывна. В электродинамике это в ряде случаев неприемлемо, так как разрывные функции могут порождать сингулярные поля, не отвечающие физической реальности. Тем не менее рассматриваемая система базисных функций нашла достаточно широкое применение.

Более сложные базисные функции предполагают изменение искомой величины вдоль одной или обеих координат в пределах ячейки. Так, если ток течет в направлении оси x и его можно считать постоянным вдоль оси y , то можно использовать так называемые «крышечные», или кусочно-линейные базисные функции (КЛБФ). Семейство таких функций показано на рисунке 5.11.

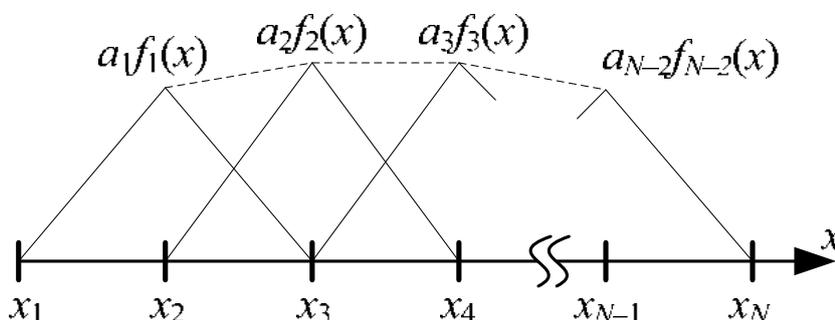


Рисунок 5.11 – Семейство кусочно-линейных базисных функций

Интервал делится на N точек и $N-1$ подынтервалов, что требует использования $N-2$ БФ. Длина КЛБФ одинакова, но, как и в случае с импульсными функциями, это не обязательное условие. Поскольку смежные функции перекрывают один сегмент, то использование треугольников позволяет кусочно линейаризовать решение между сегментами. КЛБФ определяются как

$$f_m(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_m - x}{h_x}, & x_m - h_x \leq x < x_m; \\ 1 + \frac{x_m - x}{h_x}, & x_m \leq x < x_m + h_x; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример использования КЛБФ для аппроксимации функции (5.36) приведен на рисунке 5.12 (листинг 5.7).

Из рисунков 5.11 и 5.12 видно, что решение на концах интервала (x_1 и x_N) равно нулю. Таким образом, данная реализация желательна, когда априори известно, что значение решения на концах интервала равно нулю, но не желательна, если решение может быть ненулевым. Если вместо этого добавить первый и последний сегменты полутреугольника, решение больше не будет принудительно сбрасываться в ноль (рисунок 5.13). В этом случае используется уже не $N-2$, а N КЛБФ.

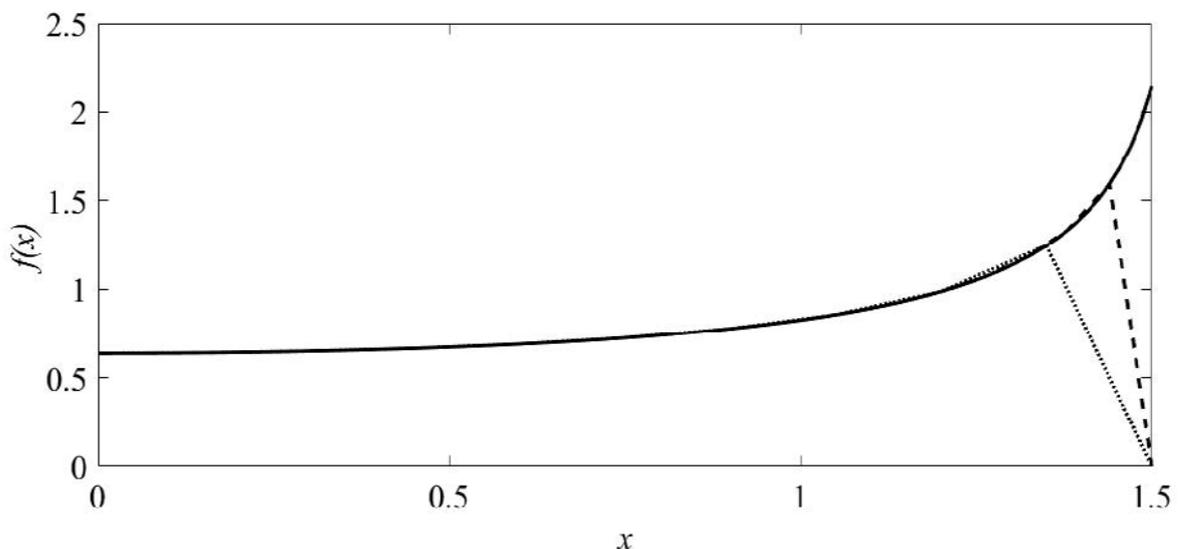


Рисунок 5.12 – Аппроксимация функции (5.36) (—) при использовании $N = 10$ (⋯) и 25 (- -) КЛБФ

```
clc;clear;
xstart=0;
xend=1.5;
N=25;
h=(xend-xstart)/N;
```

```

Nx=200;
hx=(xend-xstart)/(Nx-1);
x=0:hx:xend
Y0 = 1./sqrt((pi/2).^2-x.^2);
xh=xstart:h:xend
xc=0:h:xend;
yr=0;
m=1:Nx;
for n=1:N
    bf{n}=(1 - (xh(n) - x(m)) / h).*(xh(n) - h <= x(m) & x(m) < xh(n))+...
    (1 + (xh(n) - x(m)) / h).*((xh(n) <= x(m) & x(m) < xh(n+1)))+...
    0.*((xh(n)>=x(m)+h/2)&(xh(n)<x(m)-h));
    koef=1./sqrt((pi/2).^2-xc(n).^2);
    yr=yr+koef*bf{n};
end
hL=plot(x,yr,'g',x,Y0)
set(hL, 'LineWidth',2)
xlabel('x')
ylabel('f(x)')

```

Листинг 5.7 – Программный код для кусочно-линейной аппроксимации функции (5.36)

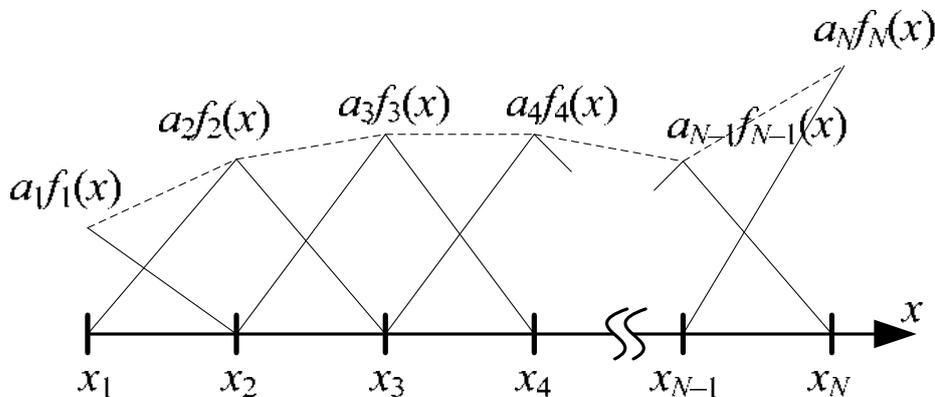


Рисунок 5.13 – Семейство кусочно-линейных базисных функций с дополнительными функциями на концах интервала

Для моделирования быстро изменяющихся в пространстве токов удобнее использовать кусочно-синусоидальные базисные функции (КСБФ), которые подобны КЛБФ (рисунок 5.14). Они часто используются при анализе проводных антенн из-за их способности представлять синусоидальные распределения токов. Такие функции определяются как

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{\sin[k(x - (x_m - h_x))]}{\sin(kh_x)}, & x_m - h_x \leq x < x_m; \\ \frac{\sin[k((x_m + h_x) - x)]}{\sin(kh_x)}, & x_m \leq x < x_m + h_x; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. При этом требуется, чтобы длина сегмента была значительно меньше периода используемой синусоиды (не менее 10).

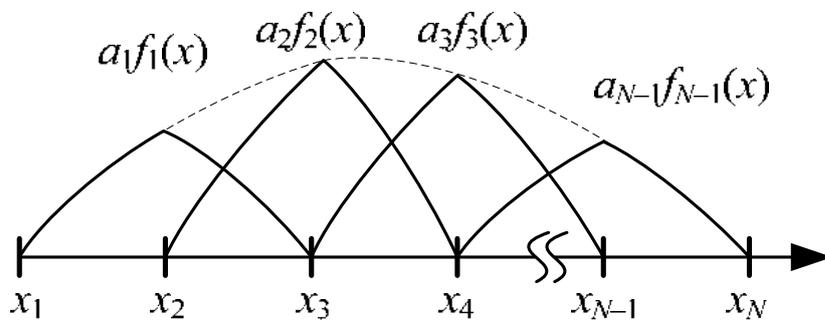


Рисунок 5.14 – Семейство кусочно-синусоидальных базисных функций

Применение КПБФ для аппроксимации функции (5.36) показано на рисунке 5.15.

Представленные БФ подобластей, как следует из названия и приведенных примеров, отличны от нуля только в части рассматриваемого интервала/области. БФ полной области определены на всем интервале. Наиболее известными являются следующие БФ:

Фурье

$$f_m = \cos(2m - 1)\pi z / 2;$$

Чебышёва

$$f_m = T_{2m-2}(z), \text{ где } T_0(z) = 1, T_1(z) = z, \dots, T_{m+1}(z) = 2zT_m(z) - T_{m-1}(z);$$

Маклорена

$$f_m = z^{2m-2};$$

Лежандра

$$f_m = P_{2m-2}(z), \text{ где } P_m(z) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dz^m} (z^2 - 1)^m,$$

$m = 1, 2, \dots, N$; $z = 2x/L$; L – длина интервала.

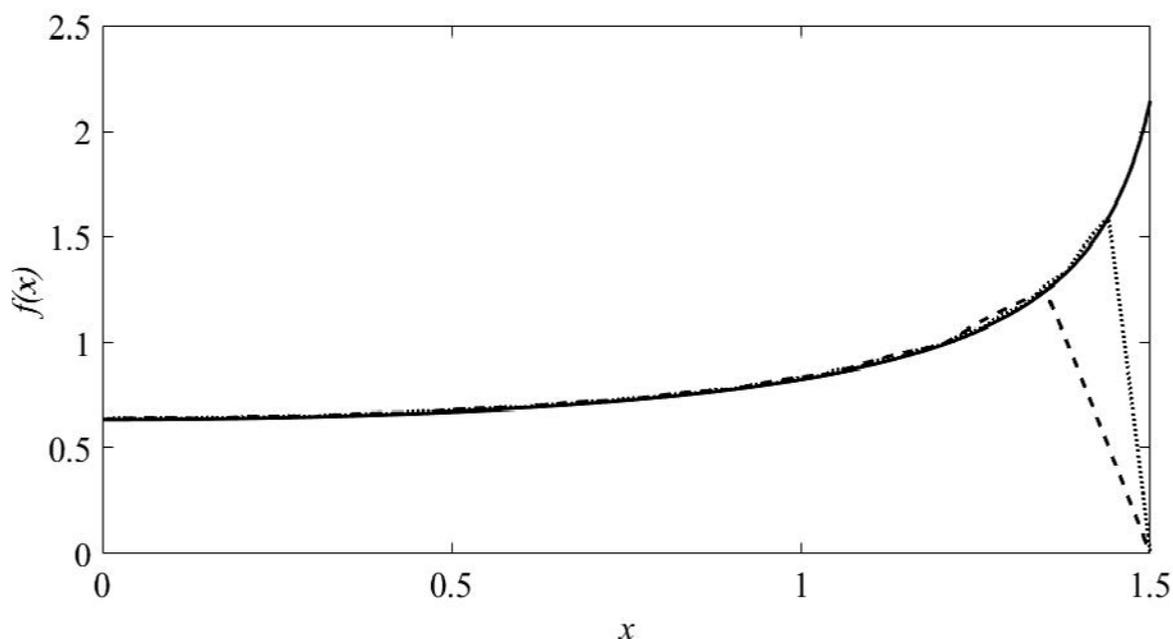


Рисунок 5.15 – Аппроксимация функции (5.36) (—) при использовании $N = 10$ (····) и 25 (- -) КСБФ при $k = 2\pi/20h$

Все БФ полной области имеют ограниченное применение, поскольку они требуют априорного знания природы аппроксимируемой функции. Поэтому БФ подобластей чаще используются на практике, особенно при разработке универсальных программных кодов.

5.4 Математическая модель вычисления емкостной матрицы многопроводной линии передачи

Системным средством сведения дифференциальных уравнений к интегральным является построение вспомогательной функции – функции Грина¹. Функция Грина (функция источника или функция влияния) – это функция ядра, полученная из линейной

¹ Джордж Грин (1793–1841) – английский математик, внесший значительный вклад в разные разделы математической физики. Самая известная работа: «Опыт приложения математического анализа к теориям электричества и магнетизма», 1828 г.

краевой задачи, которая образует важную связь между дифференциальными и интегральными формулировками. Чтобы получить поле, вызванное распределенным источником, по методу функции Грина, необходимо определить вклад каждой элементарной части источника и просуммировать все вклады (принцип суперпозиции¹).

Если $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – поле в точке наблюдения \mathbf{r} (observation point), вызванное единичным точечным источником, расположенным в точке источника \mathbf{r}' (source point или integration point), то это поле относительно распределенного источника $g(\mathbf{r}')$ является интегралом от $g(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Функция G и есть функция Грина. Таким образом, функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представляет собой потенциал в точке \mathbf{r} , возникающий из-за единичного точечного заряда в точке \mathbf{r}' . Например, рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$L\Psi = g.$$

Найдем функцию Грина, соответствующую дифференциальному оператору L , как решение неоднородного уравнения точечного источника, т. е.

$$LG(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (5.37)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{r}' – позиции точек наблюдения (x, y, z) и источника (x', y', z') соответственно (рисунок 5.16); $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – дельта-функция Дирака, определенная при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ и удовлетворяющая условию

$$\int \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')g(\mathbf{r}')dV' = g(\mathbf{r}). \quad (5.38)$$

Из уравнения (5.37) видно, что функцию Грина G можно интерпретировать как решение краевой задачи с известной функцией g , замененной на дельта-функцию (единичную импульсную функцию). То есть функцию Грина можно интерпретировать как отклик линейной системы на единичное импульсное воздействие в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

¹ Принцип суперпозиции в электростатике утверждает, что напряженность электростатического поля, создаваемого в данной точке системой зарядов, есть векторная сумма напряженностей полей отдельных зарядов (следствие того, что уравнения Максвелла в вакууме линейны).

Функция Грина обладает следующими свойствами:

- удовлетворяет уравнению $LG = 0$ за исключением точки источника согласно уравнению (5.37);
- удовлетворяет заданному граничному условию f на границе B , т.е. $G = f$ на границе B ;
- симметрична, т. е.

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (5.39)$$

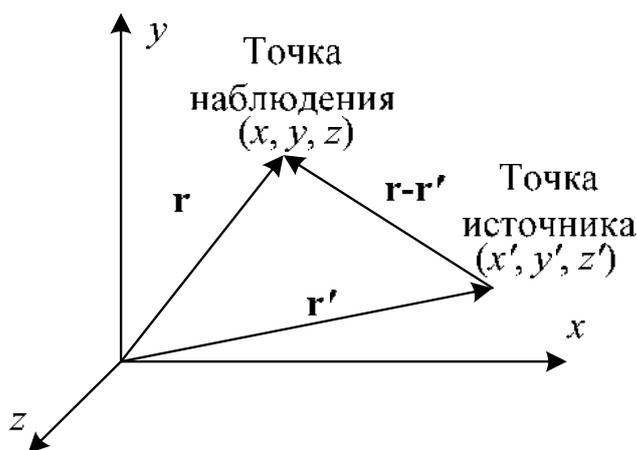


Рисунок 5.16 – Точки источника и наблюдения

В [45] представлен подробный вывод моделей вычисления емкостной матрицы с использованием МоМ в сочетании с аналитическими выражениями для элементов матрицы СЛАУ. Эти модели предназначены для двухмерных и трехмерных структур с границами произвольной сложности, включающих идеально проводящую плоскость и без нее. Для ясности дальнейшего изложения кратко поясним суть данного подхода на примере двухмерной задачи (для трехмерной задачи подход аналогичен). В качестве операторного уравнения выступает уравнение Пуассона в интегральной форме

$$\Phi = L^{-1}\rho, L^{-1} = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma, \quad (5.40)$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – функция Грина; \mathbf{r} – точка наблюдения (x, y) ; \mathbf{r}' – точка источника (x', y') ; $d\Gamma$ – дифференциал по поверхности структуры.

При такой постановке задачи считаются заданными граничные условия по приложенному напряжению Φ , требуется найти плотность заряда ρ . Отметим, что для двухмерного случая функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\pi}, \quad (5.41)$$

а

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (5.42)$$

Рассмотрим математическую модель вычисления емкостной матрицы на примере связанной МПЛ, поперечное сечение которой приведено на рисунке 5.17. Структура содержит два проводника (I и II), расположенных на диэлектрическом основании с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_{r2} над идеально проводящей (бесконечной) плоскостью.

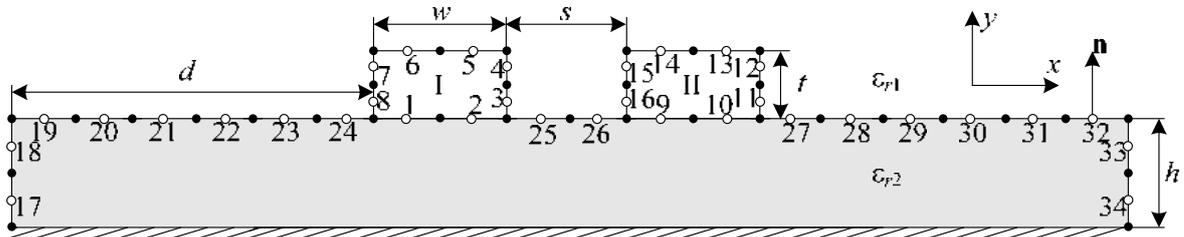


Рисунок 5.17 – Поперечное сечение связанной МПЛ

Для вычисления необходимо выполнить следующие действия [17].

Шаг 1. Дискретизировать границы проводников и диэлектрической подложки (граница раздела двух сред) на небольшие отрезки (подынтервалы) длиной l_n , $n = 1, 2, \dots, N$. На рисунке 5.17 деление на подынтервалы показано с помощью закрасенных кругов, а центры подынтервалов отмечены с помощью незакрасенных кругов. Причем дискретизируются сначала проводниковые, а затем диэлектрические границы. В данном случае границы дискретизированы на $N = 34$ подынтервала, границам проводник-диэлектрик соответствует $N_C = 16$, а диэлектрик-диэлектрик – $N_D = 18$ ($N = N_C + N_D$).

Шаг 2. Когда в структуре имеются границы соприкосновения диэлектрика с проводником, необходимо работать в терминах полной плотности заряда σ_T , которая представляет собой сумму плотностей свободного и поляризационного зарядов:

$$\sigma_T(\mathbf{r}) = \sigma_S(\mathbf{r}) + \sigma_P(\mathbf{r}).$$

На границе диэлектрик-диэлектрик полная плотность заряда состоит только из плотности поляризационных зарядов.

Шаг 3. Учесть наличие плоскости земли с помощью метода зеркальных изображений. При этом вместо функции (5.41) необходимо использовать

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\pi} - \frac{\ln |\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|}{2\pi}, \quad (5.43)$$

где $\underline{\mathbf{r}}'$ – точка мнимого источника. При отсутствии плоскости земли используется функция (5.41).

Шаг 4. Задать потенциалы (1 В) на проводниковых подынтервалах и подставить выражения для аппроксимации плотности заряда и функции Грина в уравнение (5.40). Тогда

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln |\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|] dl', \quad \mathbf{r} \in L_C, \quad (5.44)$$

где dl' – элемент контура границ проводник-диэлектрик; L_C – длина этого контура. Полученное уравнение является уравнением Фредгольма 1-го рода.

Шаг 5. Получить аналогичное уравнение для границ диэлектрик-диэлектрик. Следует учесть, что на границе диэлектрик-диэлектрик, т. е. между средами с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 , нормальная составляющая общего вектора электрического смещения $\mathbf{D}^n = \epsilon \mathbf{E}^n$ не меняется. Тогда

$$\epsilon_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1^n(\mathbf{r}) = \epsilon_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2^n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in L_D, \quad (5.45)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали (см. рисунок 5.17); $\mathbf{E}_1^n(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}_2^n(\mathbf{r})$ – общее электрическое поле в средах 1 (с ϵ_1) и 2 (с ϵ_2) соответственно (в рассматриваемой структуре $\epsilon_{r1} = 1$ (воздух)) при приближении к линии L_D границы раздела этих сред.

Далее используется связь потенциала с напряженностью поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}).$$

Подставив уравнение (5.44) в последнее, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \nabla [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln |\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|] dl' = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'}{|\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|^2} \right] dl', \quad \mathbf{r} \in L_C, \quad (5.46)\end{aligned}$$

поскольку

$$\int_L \nabla [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln |\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|] dl' = \int_L \left[\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\underline{\mathbf{r}}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|^2} \right] dl'.$$

Рассматривая предел уравнения (5.46), когда \mathbf{r} приближается к границе раздела двух сред, можно показать, что он будет различным, если \mathbf{r} приближается к границе со стороны среды 1 или со стороны среды 2. С учетом этого запишем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= \int_S \frac{\sigma_T(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' + \mathbf{n} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\epsilon_0}, \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= \int_S \frac{\sigma_T(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' - \mathbf{n} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\epsilon_0}, \quad \mathbf{r} \in L_D.\end{aligned} \quad (5.47)$$

В результате, подставив выражения (5.47) в уравнение (5.45), получим

$$0 = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\epsilon_0} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_L \sigma_T(\mathbf{r}') \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'}{|\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}'|^2} \right] \cdot \mathbf{n} dl, \quad \mathbf{r} \in L_D. \quad (5.48)$$

Шаг 6. Выразить полную плотность в виде линейной комбинации известных базисных функций ω_n и неизвестных коэффициентов α_n :

$$\sigma_T(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \omega_n(\mathbf{r}). \quad (5.49)$$

Часто используемыми являются кусочно-постоянные базисные функции, которые равны единице на подынтервале с номером n и нулю вне его. Коэффициенты α_n соответствуют значению равномерной плотности заряда на подынтервалах с длиной l_n . Так, $q_n = l_n \alpha_n$ – погонный заряд на подынтервале длиной l_n (Кл/м).

Шаг 7. Подставить выражение (5.49) в соотношения (5.44) и (5.48) и, взяв для них скалярные произведения с тестовыми функциями (Дирака), сформировать СЛАУ вида $\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{v}$, где \mathbf{S} – матрица размером $N \times N$, а $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{v} – $N \times 1$. Вектор \mathbf{v} содержит единицы в тех строках, которые соответствуют подынтервалам проводник-проводник.

Описанные шаги справедливы, если в структуре имеется один проводник, не считая опорного. При наличии нескольких проводников, как на рисунке 5.17, эти шаги повторять нет необходимости, а нужно лишь изменить вектор \mathbf{v} . Все используемые векторы \mathbf{v} можно заменить на одну матрицу \mathbf{V} , состоящую из N_{COND} столбцов, где N_{COND} – число проводников в структуре, не считая опорного. Столбцы этой матрицы соответствуют векторам \mathbf{v} , сформированным для каждого из проводников. Тогда задача сводится к СЛАУ вида $\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V}$, где $\boldsymbol{\Sigma}$ и \mathbf{V} – матрицы размером $N \times N_{\text{COND}}$. Структура полученной СЛАУ приведена на рисунке 5.18.

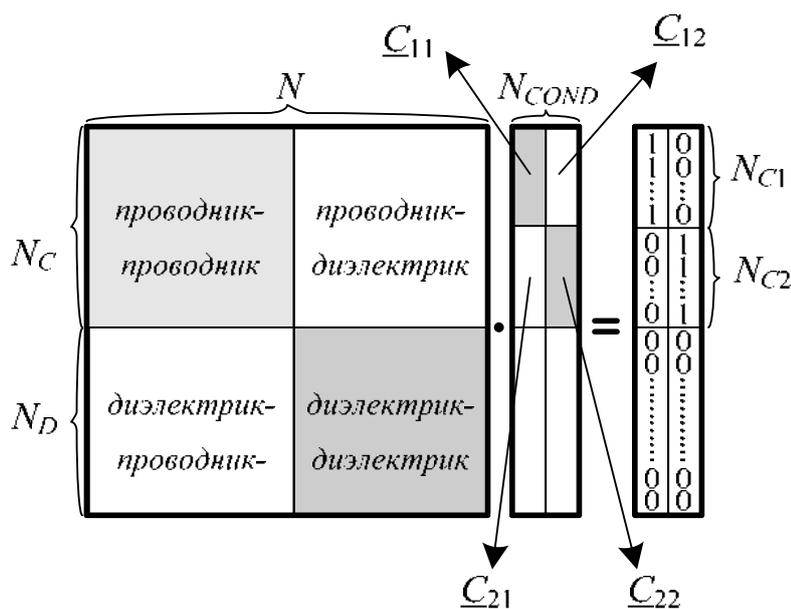


Рисунок 5.18 – Структура матрицы СЛАУ

Элементы матрицы \mathbf{S} вычисляются по формулам [45]

$$s_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} [\ln |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n| - \ln |\mathbf{r}_m - \underline{\mathbf{r}}'_n|] dl', \quad (5.50)$$

$$m = 1, \dots, N_C, \quad n = 1, \dots, N;$$

$$s_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} \left[\frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} - \frac{\mathbf{r}_m - \underline{\mathbf{r}}'_n}{|\mathbf{r}_m - \underline{\mathbf{r}}'_n|^2} \right] dl', \quad (5.51)$$

$$m = N_C + 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N, \quad m \neq n;$$

$$s_{mm} = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{2\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{L_n} \left[\frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n|^2} - \frac{\mathbf{r}_m - \underline{\mathbf{r}}'_n}{|\mathbf{r}_m - \underline{\mathbf{r}}'_n|^2} \right] dl', \quad (5.52)$$

$$m = N_C + 1, \dots, N.$$

Для вычисления интегралов в уравнениях (5.50)–(5.52) используют численное интегрирование или аналитические выражения в замкнутом виде [45]. Полученная матрица \mathbf{S} является плотной (практически полностью отсутствуют нулевые элементы). Если в рассматриваемой структуре отсутствует плоскость земли, то необходимо соблюсти закон сохранения заряда. Для этого к матрице СЛАУ \mathbf{S} добавляются дополнительные строка и столбец, элементы которых вычисляются по простым формулам, а соответствующая строка матрицы \mathbf{V} заполняется нулями [45]. При формировании СЛАУ вместо выражения (5.43) используется (5.41).

Шаг 8. Решить СЛАУ.

Шаг 9. Вычислить элементы емкостной матрицы $\underline{\mathbf{C}}$. При этом учесть, что поверхностная плотность свободных зарядов определяется как

$$\sigma_S(\mathbf{r}) = \epsilon_r(\mathbf{r})\sigma_T(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in L_{CD},$$

где $\epsilon_r(\mathbf{r})$ – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, соприкасающегося с поверхностью проводника по контуру L_C . Тогда элементы емкостной матрицы

$$\underline{C}_{ij} = \int_{L_{Ci}} \epsilon_r(\mathbf{r})\sigma_S^j(\mathbf{r}) dl_i / V, \quad V = 1 \text{ В},$$

где индекс i относится к проводнику, по контуру L_{C_i} которого ведется интегрирование, а j – к проводнику, находящемуся под потенциалом 1 В, когда остальные проводники под потенциалом 0 В. В матричном виде получим

$$C_{ij} = \sum_{k \in L_{C_i}} \varepsilon_r \Sigma_{kj} l_k / V, \quad i, j = 1, \dots, N_{\text{COND}}, \quad V = 1 \text{ В.} \quad (5.53)$$

На рисунке 5.18 продемонстрированы блоки матрицы Σ , участвующие в вычислении.

В результате задача нахождения емкостной матрицы МПЛП сводится к решению СЛАУ вида $\mathbf{S}\Sigma = \mathbf{V}$ с квадратной и плотной матрицей \mathbf{S} размером $N \times N$ ($N = N_C + N_D$), связывающей плотности заряда на подобластях дискретизированных границ проводников и диэлектриков, составляющих матрицу Σ , с потенциалами этих подобластей, задаваемыми матрицей \mathbf{V} , обе матрицы размером $N \times N_{\text{COND}}$. После вычисления матрицы Σ вычисляются элементы искомой емкостной матрицы.

Еще раз вернемся к структуре матрицы СЛАУ (см. рисунок 5.18). Для общего случая произвольно ориентированных границ проводников и диэлектриков эта матрица имеет структуру, показанную на рисунке 5.19, *а*, где демонстрируется расположение ее элементов, соответствующих проводниковым (П) и диэлектрическим (Д) границам. Для частного случая линейных и ортогональных границ двухмерной структуры [45] каждый блок матрицы на рисунке 5.19, *а* имеет структуру, показанную на рисунке 5.19, *б*, т. е. состоит из 4 субблоков, соответствующих границам, которые ортогональны осям $Y(\perp Y)$ и $X(\perp X)$. В случае трехмерных структур с ортогональными осям границами организация субблоков показана на рисунке 5.19, *в*.

Таким образом, сначала сегментируются границы проводник-диэлектрик и подынтервалам присваиваются номера с 1 по N_C . В первую очередь сегментируются и последовательно нумеруются подынтервалы, которые ортогональны оси Y (номер последнего N_{CY}), а затем ортогональные оси X (до N_C). Далее сегментируются границы диэлектрик-диэлектрик и полученным подын-

тервалам присваиваются номера с $N_C + 1$ по N . При этом сначала сегментируются и последовательно нумеруются подынтервалы, которые ортогональны оси Y (номер последнего N_{DY}), а затем ортогональные оси X (до N).

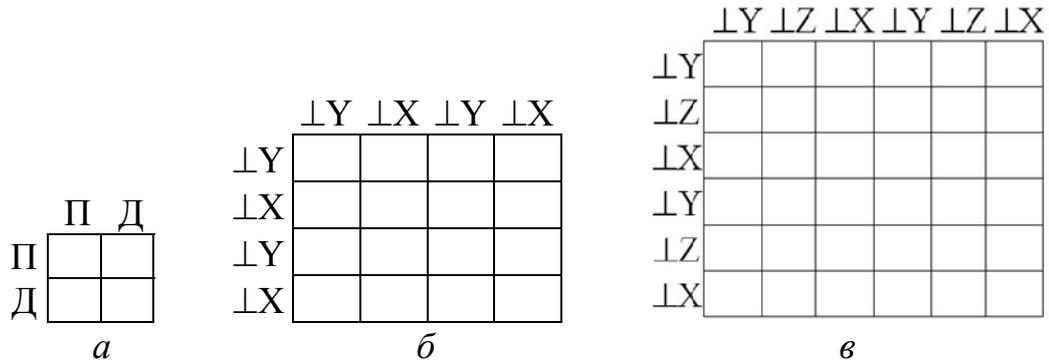


Рисунок 5.19 – Структуры матрицы СЛАУ для произвольно (а) и ортогонально ориентированных границ двухмерных (б) и трехмерных (в) структур

Каждый подынтервал описывается уникальным набором параметров, в который входят: x_n – координата X центра n -го подынтервала; y_n – координата Y центра n -го подынтервала; d_n – длина n -го подынтервала; ε_n – относительная диэлектрическая проницаемость вблизи n -го подынтервала границы проводник-диэлектрик; ε_n^+ и ε_n^- – относительные диэлектрические проницаемости на положительной (на которую направлен вектор \mathbf{n}_n) и отрицательной (от которой направлен вектор \mathbf{n}_n) сторонах n -го подынтервала границы диэлектрик-диэлектрик соответственно; \mathbf{n}_n – единичный вектор нормали из центра n -го подынтервала в направлении соответствующей оси. Из этих параметров подынтервалов вычисляются элементы матрицы СЛАУ по приведенным ниже формулам [45].

Для строк с индексами $m = 1, \dots, N_C$

$$s_{mm} = -\frac{I_{mn}}{2\pi\varepsilon_0}, \quad m=1, \dots, N_C, \quad n = 1, \dots, N, \quad (5.54)$$

где

$$I_{mn} = a_1 \cdot \ln(a_1^2 + c_1^2) - 2a_1 + 2c_1 \cdot \arctan\left(\frac{a_1}{c_1}\right) - \\ - a_2 \cdot \ln(a_2^2 + c_2^2) + 2a_2 - 2c_1 \cdot \arctan\left(\frac{a_2}{c_1}\right).$$

При этом для $n = 1, \dots, N_{CY}, (N_C + 1), \dots, N_{DY}$

$$a_1 = \frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); \quad a_2 = -\frac{d_n}{2} - (x_m - x_n); \quad c_1 = y_m - y_n, \quad (5.55)$$

а для $n = (N_{CY} + 1), \dots, N_C, (N_{DY} + 1), \dots, N$

$$a_1 = \frac{d_n}{2} - (y_m - y_n); \quad a_2 = -\frac{d_n}{2} - (y_m - y_n); \quad c_1 = x_m - x_n. \quad (5.56)$$

Для строк с индексами $m = (N_C + 1), \dots, N$

$$s_{mm} = \frac{I_{mn}}{2\pi\epsilon_0}, \quad m = (N_C + 1), \dots, N, \quad n = 1, \dots, N, \quad m \neq n;$$

$$s_{mm} = \frac{I_{mn}}{2\pi\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\epsilon_m^+ + \epsilon_m^-}{\epsilon_m^+ - \epsilon_m^-}, \quad m = (N_C + 1), \dots, N,$$

где для строк с индексами $m = (N_C + 1), \dots, N_{DY}$ при $n = 1, \dots, N_{CY}, (N_C + 1), \dots, N_{DY}$

$$I_{mn} = \arctan\left(\frac{a_1}{c_1}\right) - \arctan\left(\frac{a_2}{c_1}\right) \quad (5.57)$$

и переменные аналогичны (5.55), а при $n = (N_{CY} + 1), \dots, N_C, (N_{DY} + 1), \dots, N$

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a_2^2 + c_1^2}{a_1^2 + c_1^2}\right), \quad (5.58)$$

где переменные аналогичны (5.56).

Для строк с индексами $m = (N_{DY} + 1), \dots, N$ при $n = 1, \dots, N_{CY}, (N_C + 1), \dots, N_{DY}$ I_{mn} вычисляется по формуле (5.58) с переменными (5.55), а при $n = (N_{CY} + 1), \dots, N_C, (N_{DY} + 1), \dots, N$ – по формуле (5.57) с переменными (5.56).

Когда плоскость земли отсутствует, землей считается $(N_{\text{COND}} + 1)$ -й проводник. Тогда добавляются $(N + 1)$ -я строка и $(N + 1)$ -й столбец с элементами

$$s_{nN+1} = \frac{d_n}{2s_{nn}}, \quad s_{N+1n} = d_n \varepsilon_n, \quad n = 1, \dots, N_C.$$

5.5 Адаптивная перекрестная аппроксимация

При использовании метода моментов задача сводится к решению СЛАУ с плотной матрицей. Затраты машинной памяти пропорциональны $O(N^2)$, а затраты на ее решение, например, методом Гаусса – $O(N^3)$, что затрудняет применение этого метода при решении задач со сложной геометрией исследуемой структуры. Одним из способов экономии вычислительных ресурсов при использовании метода моментов является адаптивная перекрестная аппроксимация (АСА).

Суть АСА состоит в представлении исходной матрицы \mathbf{S} в виде произведения матриц \mathbf{U} и \mathbf{V} меньшего ранга. Преимущества данного алгоритма заключаются в его алгебраическом характере. За счет методов линейной алгебры, таких как QR-разложение, сингулярное разложение, LU-разложение и др., достигается ускорение вычислений. Алгоритм может быть модульно реализован и легко интегрирован в различные программы на основе метода моментов. Однако матрица СЛАУ обладает сингулярностью на резонансных частотах, поэтому применить АСА к исходной матрице \mathbf{S} не представляется возможным. В то же время вследствие специфики функции Грина данная матрица состоит из блоков, соответствующих взаимодействию хорошо сепарабельных базисных функций, благодаря чему они могут быть представлены в виде иерархических матриц. Таким образом, в общем случае алгоритм АСА представляет собой многоуровневую систему сжатия матриц, которая обеспечивает ускорение вычислений. Следует отметить, что алгоритм аппроксимирует исходную матрицу, требуя лишь частичную информацию о ней. Поясним суть АСА.

Пусть $\mathbf{S} = \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{S}}$, где \mathbf{R} – матрица ошибки аппроксимации; $\tilde{\mathbf{S}}$ – матрица малого ранга (ранг $\tilde{\mathbf{S}} \leq r$, $r \ll N$). Требуется найти матрицу аппроксимации $\tilde{\mathbf{S}}$ для плотной матрицы \mathbf{S} (размером $N \times M$) в виде произведения матриц \mathbf{U} и \mathbf{V} , т. е. $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{U}\mathbf{V} = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$, где \mathbf{U} – матрица размером $M \times r$, а \mathbf{V} – матрица размером $r \times N$, с точностью, удовлетворяющей условию минимизации матрицы ошибки

$$\|\mathbf{R}\|_F = \|\mathbf{S} - \tilde{\mathbf{S}}\|_F \leq \text{TOL} \|\mathbf{S}\|_F,$$

где TOL – требуемая точность.

Для ясности дальнейшего изложения введем обозначения (с использованием синтаксиса Octave). Пусть имеем матрицы $\mathbf{I} = [I_1 \dots I_r]$ и $\mathbf{J} = [J_1 \dots J_r]$, содержащие выбранные строчные и столбцовые индексы матрицы \mathbf{S} . Для обозначения строки I_k , например, матрицы \mathbf{R} используется запись $\mathbf{R}(I_k, :)$, а для столбца J_k – запись $\mathbf{R}(:, J_k)$. Тогда АСА можно представить в виде следующего алгоритма.

Алгоритм адаптивной перекрестной аппроксимации

Задать ε . Положить $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$ и $I_1 = 0$.

$$\mathbf{R}(I_1, :) = \mathbf{S}(I_1, :)$$

Найти индекс J_1 , удовлетворяющий: $|\mathbf{R}(I_1, J_1)| = \max_j (|\mathbf{R}(I_1, j)|)$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}(I_1, :) / \mathbf{R}(I_1, J_1)$$

$$\mathbf{R}(:, J_1) = \mathbf{S}(:, J_1)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{R}(:, J_1)$$

$$\|\tilde{\mathbf{S}}^{(1)}\|_F^2 = \|\tilde{\mathbf{S}}^{(0)}\|_F^2 + \|\mathbf{u}_1\|_F^2 \|\mathbf{v}_1\|_F^2$$

Найти индекс I_2 , удовлетворяющий: $|\mathbf{R}(I_2, J_1)| = \max_{i \neq I_1} (|\mathbf{R}(i, J_1)|)$

Для $k = 2, 3, \dots$, вычислить

$$\mathbf{R}(I_k, :) = \mathbf{S}(I_k, :) - \sum_{l=1}^{k-1} (\mathbf{u}_l)_{I_k} \mathbf{v}_l$$

Найти J_k , удовлетворяющий: $|\mathbf{R}(I_k, J_k)| = \max_{j \neq J_1, \dots, J_{k-1}} (|\mathbf{R}(I_k, j)|)$,

J_{k-1}

Если

$\mathbf{R}(I_k, J_k) = 0$, то конец, аппроксимация не получена

Иначе

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{R}(I_k, :) / \mathbf{R}(I_k, J_k)$$

$$\mathbf{R}(:, J_k) = \mathbf{S}(:, J_k) - \sum_{l=1}^{k-1} (\mathbf{v}_l)_{J_k} \mathbf{u}_l$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{R}(:, J_k)$$

$$\|\tilde{\mathbf{S}}^{(k)}\|_F^2 = \|\tilde{\mathbf{S}}^{(k-1)}\|_F^2 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} |\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_k| \|\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_k\| + \|\mathbf{u}_k\|_F^2 \|\mathbf{v}_k\|_F^2$$

Если

$$\|\mathbf{u}_k\|_2 \|\mathbf{v}_k\|_2 \leq \varepsilon \|\tilde{\mathbf{S}}^{(k)}\|_2, \text{ то } \mathbf{конец} \text{ итерационного процесса, } r = k$$

Иначе

Найти индекс I_{k+1} , удовлетворяющий равенству $|\mathbf{R}(I_{k+1}, J_k)| =$

$$\max_i (|\mathbf{R}(i, J_k)|), i \neq I_1, \dots, I_k$$

Увеличить k

Из алгоритма видно, что для построения аппроксимации не нужно заранее знать все элементы исходной матрицы \mathbf{S} . Для выполнения вычислений с помощью данного алгоритма требуется не более r итераций, сложность каждой из которых пропорциональна $O(r(M+N))$. Таким образом, общие вычислительные затраты алгоритма пропорциональны $O(r^2(M+N))$. Далее приведен программный код Octave, предназначенный для считывания матрицы и ее разложения.

```
function ACA_main
clc;
clear;
A=dlmread('matrix_forACA_.txt');
b=A;
[n,m]=size(b);
eps_tol=1.e-3;
[U,V] = ACA(b,eps_tol,n,m);
size(U)
size(V)
norm(b-U*V)
function [U,V] = ACA(A,ACA_tol,M,N)
J = zeros(N,1);
I = zeros(M,1);
i = (2:M);
j = (1:N);
I(1) = 1;
Rik=A(I(1),:);
col = find( abs(Rik(j)) == max(abs(Rik(j))) );
J(1) = j(col(1));
```

```

j(j==J(1))=[];
V = Rik/Rik(J(1));
Rjk=A(:,J(1));
U = Rjk;
normZ = norm(U)^2 * norm(V)^2;
row = find( abs(Rjk(i)) == max(abs(Rjk(i))) );
I(2) = i(row(1));
i(i==I(2))=[];
for k=2:min(M,N)
    Rik=A(I(k,:))- U(I(k,:))*V;
    col = find(abs(Rik(j)) == max(abs(Rik(j))) );
    J(k) = j(col(1));
    j(j==J(k))=[];
    if(Rik(J(k)) == 0)
        break;
    end
    Vk = Rik/Rik(J(k));
    Rjk=A(:,J(k)) - U*V(:,J(k));
    Uk = Rjk;
    normZ = normZ + 2*sum(real((U*Uk).*(Vk*V').')) + ...
    norm(Uk)^2*norm(Vk)^2;
    U = [U Uk]; V = [V; Vk];
    if norm(Uk)*norm(Vk) <= ACA_tol*sqrt(normZ)
        break
    end
    if k==min(M,N)
        break;
    end
    row = find( abs(Rjk(i)) == max(abs(Rjk(i))) );
    I(k+1) = i(row(1));
    i(i==I(k+1))=[];
end
end

```

Контрольные вопросы и задания

1. Для решения каких уравнений применяется метод моментов?
2. К СЛАУ с какой матрицей сводит задачу метод моментов?
3. На каких два вида делятся системы базисных функций, используемых в методе моментов?
4. Какой тип тестовых функций используется в методе коллокаций?

5. Назовите тип тестовых функций в методе Галёркина.
6. Назовите последовательность действий при использовании метода моментов для решения электростатических задач.
7. Для чего применяется адаптивная перекрестная аппроксимация?
8. Разработать программу на языке Octave для аппроксимации функции (5.36) с использованием кусочно-синусоидальных базисных функций.
9. Модифицировать программный код из листинга 5.4 для учета симметрии структуры и тем самым уменьшения вычислительных затрат.
10. Разработать программу на языке Octave для вычисления распределения заряда на поверхности структуры, изображенной на рисунке 3.16 (при $a = b = 1$ см, $c = d = 2$ см), и ее емкости.