**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

**АНОО ВО «Научно-технический университет "Сириус"»**
**ФГБУН «Институт вычислительной математики РАН им. Г. И. Марчука»**
**Московский центр фундаментальной и прикладной математики**
**ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет»**

# МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

**и**

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

**Тезисы докладов Международной научной конференции**

**(г. Сочи, 10–15 августа 2020 г.)**

**Под редакцией**
**профессора, д.ф.-м.н. Ю.Г. Смирнова**

**Пенза**
**Издательство ПГУ**
**2020**

УДК 517.958+517.927.4
ББК 22.147
М34

**Методы вычислений и математическая физика** : тезисы
М34 докладов Междунар. науч. конф. (г. Сочи, 10–15 августа 2020 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. Ю. Г. Смирнова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. – 127 с.

ISBN 978-5-907364-07-3

В сборнике представлены тезисы докладов Международной конференции, приуроченной к 65-летию академика РАН Евгения Евгеньевича Тыртышникова, выдающегося российского ученого, основателя большой научной школы. Основные направления конференции: вычислительные методы алгебры, аналитические методы исследования задач математической физики, численные методы решения задач математической физики.

Издание предназначено для специалистов в области вычислительной математики, математического моделирования, электродинамики и математической теории дифракции.

**УДК 517.958+517.927.4**
**ББК 22.147**



**ISBN 978-5-907364-07-3**

# ПЕРЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЕДОБУСЛОВЛИВАТЕЛЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**С. П. Куксенко, А. А. Квасников, И.Е. Сагиева**

г. Томск, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,

*ksergp@tu.tusur.ru*

Как известно, математическое моделирование, наряду с теорией и натурным экспериментом, является третьим путем познания. При этом наиболее затратным этапом использования математической модели является решение СЛАУ. Кроме того, широко применяются многовариантный анализ или оптимизация объекта в диапазоне параметров, что требует решения последовательности $m$ СЛАУ

$$\mathbf{A}_k\mathbf{X}_k = \mathbf{B}_k, k = 1, 2, ..., m, \qquad (1)$$

увеличивающего вычислительные затраты [1]. Поэтому актуален поиск способов их уменьшения.

Для решения (1) можно раздельно решить $m$ СЛАУ, но это потребует в $m$ раз больше времени. Альтернативой является использование для решения текущей СЛАУ информации, полученной при решении предыдущих. Например, если матрица из (1) неизменна, а правые части заранее известны, то применимы блочные методы. Для «сдвинутых» (shifted) систем часто используют «замороженный» (frozen) предобусловливатель или его обновляют [2, 3]. Если изменения в матрице более существенны, то предобусловливатель периодически переформировывают [4]. При этом определение периодичности переформирования производится эмпирически, что ограничивает применимость данных способов. Поэтому предложено адаптивно переформировывать предобусловливатель на основе среднего арифметического времени решения [5]. Однако этот способ имеет недостаток, связанный со сложностью точной оценки времени. Цель данной работы – обобщение этого способа.

Оценим арифметическую сложность решения (1) как

$$Q_\Sigma = Q_{PR} + \sum_{k=1}^{m} Q_k, \qquad (2)$$

Работа выполнена при поддержке проектов Минобрнауки России (№ FEWM-2020-0039 — теория, № FEWM-2020-0041 — моделирование) и РФФИ (№ 19-37-51017 — эксперимент)

где $Q_{PR}$ — сложность вычисления предобусловливателя из первой СЛАУ, $Q_k$ — сложность решения $k$-й СЛАУ. Тогда среднея арифметическая сложность решения $k$ систем оценивается как

$$\bar{Q}(k) = \frac{Q_\Sigma(k)}{k} = \frac{1}{k}\left(Q_{PR} + \sum_{j=1}^{k} Q_j\right). \tag{3}$$

Введем дополнительную переменную

$$q_k = kQ_{k-1} - \sum_{j=1}^{k} Q_j. \tag{4}$$

**Теорема 1.** *Если $q_k$ монотонно возрастает при $k = 1, 2, \ldots, i, \ldots$ и выполнены условия $q_1 < Q_{PR}$ и $q_i < Q_{PR} \leqslant q_{i+1}$ для некоторого $i$, тогда для него достигается единственный минимум функции $\bar{Q}(k)$.*

**Доказательство.** *Рассмотрим разность $\bar{Q}(k+1) - \bar{Q}(k)$. Легко показать, что $\bar{Q}(k+1) - \bar{Q}(k) = (q_k - Q_{PR})/(k(k+1))$. Отсюда следует, что функция $\bar{Q}(k)$ при $q_k > Q_{PR}$ возрастает, а иначе — убывает. При этом для наличия её минимума достаточным является выполнение условий $q_1 < Q_{PR}$ и $q_i < Q_{PR} \leqslant q_{i+1}$ для некоторого конечного $i$. Теорема доказана.*

**Теорема 2.** *Если при $k = 1, 2, \ldots, m$ выполняются условия $Q_j = s$ и $s < Q_{PR}$, то $\bar{Q}(k)$ убывает и стремится к $s$.*

**Доказательство.** *Пусть $Q_j = s$, тогда из (4) следует, что $q_k = 0$. При этом $\bar{Q}(k+1) - \bar{Q}(k) = -Q_{PR}/(k(k+1))$. Отсюда следует, что функция $\bar{Q}(k)$ убывает для любого $k$. Тогда, согласно (3), получим $\lim_{k\to\infty} \bar{Q}(k) = \lim_{k\to\infty}((Q_{PR} + ks)/k) = s$. Теорема доказана.*

Прокомментируем условия из теоремы 1. Очевидно, что при решении (1), из-за потери эффективности предобусловливателя, происходит рост сложности решения последующих систем. При этом сложность решения первой СЛАУ меньше сложности вычисления предобусловливателя, т.е. $q_1 < Q_{PR}$, и у функции $\bar{Q}(k)$ существует единственный минимум. Тогда можно сформулировать условие для переформирования предобусловливателя вида

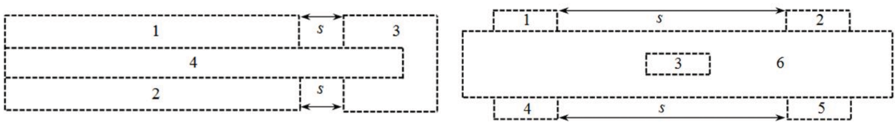
$$\bar{Q}(k-1) < \bar{Q}(k) \rightarrow \frac{Q_\Sigma(k-1)}{k-1} < \frac{Q_\Sigma(k)}{k}. \tag{5}$$

Из теоремы 2 следует, что функция $\bar{Q}(k)$ будет постоянно убывать при неизменной арифметической сложности решения отдельных СЛАУ $Q_k$, что возможно только при постоянном и низком числе итераций, требуемых для решения. При этом предобусловливатель не будет переформировываться.

Оценка арифметической сложности итерационного метода не составляет проблем и выполняется априорно. Например, для метода CGS она составляет $Q_{\mathrm{CGS}} = 10N^2 + 16N + 1 + N_{it}(20N^2 + 43N + 15) + (N_{it} - 1)(10N + 4)$, где $N$ — порядок матрицы, а $N_{it}$ — число итераций.

Свойства и структура матрицы СЛАУ определяются спецификой предметной области и используемым численным методом. Для демонстрации эффектиности условия (5) моделировались две линии передачи (рис. 1) с использованием квазистатического подхода и метода моментов.

Изменением зазоров $s$ между проводниками линий сформировано по 100 СЛАУ с $N$=2001 и $N$=3109 соответственно. В качестве начального приближения использовалось решение предыдущей системы. Для метода BiCGStab и условия (5) получены ускорения 1,52 и 1,59 раза относительно использования «замороженного» предобусловливателя для линий 1 и 2 соответственно. Для метода CGS эти значения составили 1,05 и 1,33 раза. Для наглядности на рис. 2 приведено число итераций при решении $k$-й СЛАУ с использованием условия (5) и выбором оптимального числа итераций, полученного предварительно перебором. Видно, как условие (5) позволяет адаптивно и без участия пользователя переформировывать предобусколиватель.




*а* *б*

*Рис. 1: Поперечные сечения линиий передачи 1 (1–3 — проводники, 4 — диэлектрик) (а) и 2 (1–5 — проводники, 6 — диэлектрик) (б)*

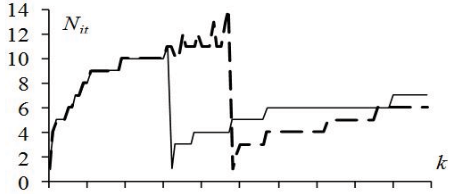



*Рис. 2: Число итераций для решения k-й СЛАУ с переформированием предобусловливателя по (5) (– –) и по заданию оптимального порога числа итераций (—) для метода BiCGStab и линии 1*

Таким образом, в работе предложено условие для адаптивного переформирования предобусловливателя по средней арифметической сложности решения последовательности СЛАУ.

**Библиографический список**

1. Gazizov, T. R. Solving the complexity problem in the electronics production process by reducing the sensitivity of transmission line characteristics to their parameter variations / T. R. Gazizov, I. Ye. Sagiyeva, S. P. Kuksenko // Complexity. — 2019. — 11 p.

2. Knoll, D.A. Newton-Krylov methods applied to a system of convection-reaction-diffusion equations / D. A. Knoll, P. R. McHugh // Computer physics communications. — 1995. — Vol. 88, № 2—3. — P. 141–160.

3. Bellavia, S. New updates of incomplete LU factorizations and applications to large nonlinear systems / S. Bellavia, B. Morini, M. Porcelli // Optimiz. meth. and software. — 2014. — Vol. 29, № 2. — P. 321–340.

4. Meister, A. Efficient preconditioning of linear systems arising from the discretization of hyperbolic conservation laws / A. Meister, C. Vomel // Advances in computational mathematics. — 2001. — Vol. 14, № 1. — P. 49–73.

5. Ахунов, Р. Р. Многократное решение систем линейных алгебраических уравнений итерационным методом с адаптивным переформированием предобусловливателя / Р. Р. Ахунов, С. П. Куксенко, Т. Р. Газизов // Журнал вычислительной матемематики и матемематической физики. — 2016. — № 56 (8). — С. 1395–1400.